Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 8, стр. 453 – 457 *20 апреля 1980 г.*

ТОЧНЫЕ МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА ДЛЯ НЕИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

М.М.Богдан, А.С.Ковалев

Методом Хироты найден явный вид многосолитонных решений уравнений динамики анизотропного ферромагнетика при учете магнито-дипольного взаимодействия.

Нелинейная динамика одномерного анизотропного ферромагнетика описывается уравнением Ландау – Лифшица без диссипации [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M} = \left[\mathbf{M}\times\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{M}\right] + \beta[\mathbf{M}\times\mathbf{n}_z](\mathbf{M}\mathbf{n}_z) - \gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{n}_x](\mathbf{M}\mathbf{n}_x). \qquad (1)$$

Гиромагнитное отношение, константа обменного взаимодействия и величина номинальной намагниченности внесены в перенормировку времени t и координаты x, так что $\mathbf{M}$ – единичный безразмерный вектор, параллельный направлению намагниченности; $\mathbf{n}_i$ – единичные орты осей. Последние члены в правой части уравнения (1) описывают анизотропию магнетика и магнито-дипольное взаимодействие. В частном случае одноосного ферромагнетика с осью анизотропии вдоль $\mathbf{n}_z$ (легкоосному случаю отвечает $\beta > 0$), учет магнито-дипольного взаимодействия приводит к значению $\gamma = 4\pi$.

В последнее время широко обсуждаются описываемые решениями уравнения (1) уединенные волны намагниченности [2 – 10]. При $\beta > \gamma$ простейшее решение уравнения (1) вида $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x - Vt)$ описывает движущуюся доменную границу [2]. Более сложные двухпараметрические уединенные решения были рассмотрены в работе [3] для $\gamma = 0$ и в работах [4–6] для $\gamma = 4\pi$. Существование этих точных решений связано с полной интегрируемостью уравнения (1). Действительно, как было показано в [7] для случая $\beta = \gamma = 0$, в [8] для $\gamma = 0$ и в [9] для общего случая, уравнению Ландау – Лифшица может быть сопоставлена обратная задача теории рассеяния (ОЗР). Однако в рамках ОЗР нахождение явного вида двухпараметрических решений [3 – 6] представляет собой сложную вычислительную проблему. Более конструктивный метод построения точных многосолитонных решений нелинейных уравнений был предложен Хиротой [10]. В данной работе нами найдено преобразование Хироты для уравнения Ландау – Лифшица (1) и явный вид его N-солитонных решений.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$M_x + iM_y = 2\left\{\frac{g^*}{f} + \frac{f^*}{g}\right\}^{-1}, \qquad M_z = \left\{\frac{f^*}{g} - \frac{g^*}{f}\right\}\left\{\frac{g^*}{f} + \frac{f^*}{g}\right\}^{-1}, \tag{2}$$

где g и f – комплексные функции x и t. Подстановка (2) приводит к весьма громоздкому уравнению для g и f, однако, как обычно в методе Хироты, оно расщепляется на систему двух более простых уравнений, имеющих N-солитонные решения. С помощью дифференциальных операторов Хироты [10] эти уравнения записываются в следующем виде:

$$f\left\{iD_t + D_x^2 - 1 - \frac{\epsilon}{2}\right\}gf^* + g^*\left\{D_x^2 gg - \frac{\epsilon}{2}f^*f^*\right\}, \tag{3а}$$

$$g^*\left\{-iD_t + D_x^2 - 1 - \frac{\epsilon}{2}\right\}gf^* + f\left\{D_x^2 f^*f^* - \frac{\epsilon}{2}gg\right\}, \tag{3б}$$

где

$$D_t^m D_x^n u(x,t)v(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n u(x,t)v(x',t')\Big|_{\substack{x=x'\\ t=t'}}.$$

Константа анизотропии внесена в дополнительную перенормировку x и t и введено обозначение $\epsilon = \gamma/\beta$. В отличие от обычной для данного метода билинейной формы уравнений, выражения (3а, б) являются трилинейными, что усложняет дальнейшие вычисления, но оказывается непринципиальным (см. также работу [11]).

Решение системы уравнений (3), отвечающее солитонам, имеет следующий вид:

$$g^* = \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \sum_{{}_N C_{2m+1}} a(j_1, \ldots, i_{2m+1}) \exp(\eta_{j_1} + \ldots + \eta_{i_{2m+1}}), \tag{4а}$$

$$f = \sum_{n=0}^{[N/2]} \sum_{{}_N C_{2n}} a(i_1, \ldots, i_{2n}) \exp(\eta_{i_1} + \ldots + \eta_{i_{2n}}), \tag{4б}$$

$$a(i_1, \ldots, i_n) = \begin{cases} \prod\limits_{k<e}^{(n)} a(i_k, i_e) & n \geqslant 2 \\ 1 & n = 0, 1 \end{cases} \tag{5}$$

где $[N/2]$ – максимальное целое число, кроме $N/2$, ${}_N C_n$ – суммирование по всем комбинациям из N элементов по n, (n) – произведение всех парных комбинаций из n элементов. Каждому солитону соответствует экспонента с показателем

$$\eta_i = k_i x + \omega_i t + \eta_i^\circ, \tag{6}$$

где

$$\omega_i^2 = (k_i^2 - 1)(1 + \epsilon - k_i^2). \tag{7}$$

Например, для трех солитонов решение (4) выглядит так:

$$g^* = \exp\eta_1 + \exp\eta_2 + \exp\eta_3 + a(1, 2, 3)\exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3),$$

$$f = 1 + a(1, 2)\exp(\eta_1 + \eta_2) + a(1, 3)\exp(\eta_1 + \eta_3) + a(2, 3)\exp(\eta_2 + \eta_3).$$

Множители $a(s, p)$, через которые выражаются коэффициенты сумм (4) равны:

$$a(s, p) = \frac{k_p - k_s}{k_p + k_s} \; \frac{(\omega_s k_p^2 - \omega_p k_s^2) - (\omega_s - \omega_p)}{(\omega_s k_p^2 + \omega_p k_s^2) - (\omega_s + \omega_p)}. \tag{8}$$

Величиной $\ln a(s, p)$ определяется обмен фазами между проходящими друг через друга s- и p-солитонами.

Решение (4) – (8) описывает систему "свободных" солитонов и солитонов, попарно образующих связанные состояния. При этом "свободному" солитону отвечает блоховская доменная граница. Для нее k_i и

ω_i вещественны, $\mathrm{Re}\,\eta_i^\circ$ – произвольна и описывает положение центра доменной стенки, а $\mathrm{Im}\,\eta_i^\circ$ однозначно связана с k_i :

$$k_i^2 = 1 + \epsilon \cos^2 \mathrm{Im}\eta_i^\circ \, . \tag{9}$$

Таким образом, каждый солитон характеризуется одним параметром (**на**пример, значением k_i) и N-солитонное решение является N-параметрическим.

При замене $k_i \to -k_i$, $\omega_i \to -\omega_i$ мы получаем доменную границу, движущуюся в том же направлении с той же скоростью, но в которой $M_z \to -M_z$ (назовем такое решение антисолитоном).

Две доменные границы разного знака (пара солитон-антисолитон) могут образовывать связанное состояние – самолокализованную волну намагниченности. Тогда для этой пары $k_i = k_j^*$, а связь с фазами η_i° и η_j° описывается соотношением

$$k_i^2 = 1 + \epsilon \,\mathrm{ch}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\eta_i^\circ - \eta_j^{\circ *}\right) \right\}. \tag{10}$$

Из четырех констант $\mathrm{Re}\eta_i^\circ$, $\mathrm{Re}\,\eta_j^\circ$, $\mathrm{Im}\eta_i^\circ$, $\mathrm{Im}\eta_j^\circ$ две произвольны и определяют координату центра тяжести связанных доменных границ и отсчет фазы их взаимного колебания.

Нами доказано, что решение (4) – (10) удовлетворяет уравнению Ландау – Лифшица для случаев одного, двух и трех солитонов. Односолитонное решение, естественно, совпадает с результатами Уокера [2] для движущейся или неподвижной доменной границы в ферромагнетике. При этом из (6) – (7) вытекает выражение для максимальной скорости перемещения стенки $V_{max} = \sqrt{1+\epsilon} - 1$. Двух- и трехсолитонные решения с вещественными k_i описывают соответственно две и три доменные стенки, все взаимодействие которых сводится к парному обмену фаз при прохождении их друг через друга (частный случай такого двухсолитонного решения, когда скорости двух стенок разного знака одинаковы по величине и противоположны по направлению был приведен в работе [4]). Выражение для самолокализованной волны намагниченности совпадает с найденным в работе [3] для $\gamma = 0$ и с результатом работы [6] для уравнения Ландау – Лифшица с учетом магнитодипольного взаимодействия.

В заключение мы благодарим А.М.Косевича и И. М.Бабич за обсуждение результатов данной работы и ознакомление нас со своими результатами до их публикации.

Физико-технический
институт низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
26 февраля 1980 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау. Сб. трудов, М., изд. Наука, 1, 128, 1969.

[2] А.Хуберт. Теория доменных стенок в упорядоченных средах, М., изд. Мир, стр. 100, 1977.

[3] А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А. С. Ковалев. Письма в ЖЭТФ, **25**, 516, 1977.

[4] Б.А. Иванов, А.М. Косевич. И.М. Бабич. Письма в ЖЭТФ, **29**, 777, 1979.

[5] В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин. Письма в ЖЭТФ, **29**, 601, 1979.

[6] И.М. Бабич, А.М. Косевич. Письма в ЖЭТФ, **31**, 224, 1980.

[7] L. A. Takhtajan. Phys. Lett., **64A**, 235, 1977.

[8] А.Е. Боровик. Письма в ЖЭТФ, **28**, 629, 1978.

[9] E.K. Sklyanin. LOMI Preprint E-31979, Leningrad.

[10] R. Hirota, J. Satsuma. Suppl. Progr. Theor. Phys., **59**, 64, 1976.

[11] Б.С. Гетманов. Письма в ЖЭТФ, **25**, 132, 1977.