Письма в ЖЭТФ, том 31, вып. 8, стр. 479 – 482 *20 апреля 1980 г.*

БЕСПОРОГОВЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ БАЛЛОННЫЕ МОДЫ

О.П.Погуце, Э.И.Юрченко

В настоящей работе показано, что диссипативные баллонные моды в токамаке не имеют порога по величине градиента давления и развиваются с инкрементом, существенно большим обратного скинового времени $\gamma \sim 1/\tau_s(\tau_s/\tau_\theta)^{2/3}$ (τ_s – скиновое время, τ_θ – альфеновское время по полю тока, $\tau_s/\tau_\theta >> 1$).

Влияние конечной проводимости на желобковую неустойчивость тороидального плазменного шнура было рассмотрено в работах [1, 2].

Основной эффект учета конечной проводимости заключался в исчезновении стабилизирующего влияния шира. Неустойчивость имела порог по величине градинета давления и начинала развиваться, когда баллонный эффект превосходил стабилизацию за счет магнитной ямы. Инкремент этой неустойчивости $\gamma \sim 1/\tau_s(\tau_s/\tau_\theta)^{2/3}$ был (τ_s – скиновое время, τ_θ – альфеновское время по полю тока) много больше обратного скинового времени.

Прогресс в исследовании баллонных мод желобковой неустойчивости идельной плазмы показал, что необходимый критерий устойчивости для идеальных баллонных мод оказался жестче критерия Мерсье [3] за счет новых дестабилизирующих членов, связанных с широм [4]. При этом возник парадокс: порог диссипативной желобковой неустойчивости, следующий из работ [1, 2], оказался выше порога идеальных баллонных мод, полученного в работе [4]. Этот парадокс будет разрешен ниже.

В настоящей работе исследуются диссипативные баллонные моды, исходя из уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики при учете сжимаемости. Возмущения плазмы, следуя методу работы [5], описываются с помощью электростатического потенциала $\tilde{\phi}$, продольной компоненты векторного потенциала $\tilde{A}_s$ и возмущенного давления $\tilde{P}$. При этом преобразование, предложенное в работе [6], в пределе больших азимутальных чисел ($m \approx nq >> 1$) сводит линеаризованную исходную систему к двум уравнениям для Фурье – образов ϕ и P:

$$\frac{d}{dy}\,\frac{\Delta}{(1+\Delta/\Gamma)}\,\frac{d\phi}{dy} - y^2\tau_\theta^2(1+S^2y^2)\phi + \frac{aRB^s}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\,\frac{1}{B^s} - \frac{Sy}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{1}{B^s}\right)P = 0, \qquad (1)$$

$$\left(1 - \frac{1}{y^2\tau_c^2}\,\frac{d^2}{dy^2}\right)P - \left[1 - \frac{1}{y^2\tau_c^2}\,\frac{d}{dy}\,\frac{1}{(1+\Delta/\Gamma)}\,\frac{d}{dy}\right]\phi = 0. \qquad (2)$$

Здесь $S = q'\rho/q$, $a = -2P_0'Rq^2/B^2$, $\tau_\theta = Rq/C_A$, $C_A^2 = B^2/4\bar{\pi}\rho_0$, $\tau_c = Rq/C_S$, $C_s^2 = \gamma_0 P_0/\rho_0$, $\tau_s = 4\bar{\pi}\sigma a^2/c^2$, a и R – малый и большой радиусы тора; q – коэффициент запаса устойчивости, $\Gamma = \gamma\tau_s/n^2q^2$, $\Delta = \rho\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}} + \frac{s^2y^2}{\rho^2}\,\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} - 2\frac{Sy}{\rho}\,\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)$, где g_{ik} – метрические коэффициенты поверхностной системы координат с прямыми силовыми линиями [7].

В случае идеально проводящей плазмы $\gamma \sim 1/\tau_\theta$, при этом $\Delta << \Gamma$, и система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению второго порядка для ϕ [8].

В случае неидеально проводящей плазмы $\gamma << 1/\tau_\theta$ в ур. (1), (2) имеется два различных масштаба $y \sim 1$ и $y >> 1$. Это позволяет применить к ним метод усреднения Ван дер Поля.

Баллонные моды в токамаке при $nq >> 1$ представляют собой локализованные по радиусу шнура возмущения, которым соответствуют в усредненном уравнении большие характерные y. При $y^2 >> M^2/\Gamma^2$ уравнения (1), (2) сводятся к одному усредненному уравнению. Для круговых магнитных поверхностей оно имеет следующий вид:

$$\Gamma P'' - \left\{\frac{\Gamma^2}{N^2}(1+S^2y^2) + aU_0 - \frac{a^2(1+S^2y^2+M^2/\Gamma)}{2\Gamma(1+M^2/\Gamma^2)[1+\Gamma(1+S^2y^2)/N]}\right\}P = 0. \qquad (3)$$

Здесь $M = \tau_s/\tau_c n^2q^2$, $N = \tau_s/\tau_\theta n^2q^2$ параметры, характеризующие отношение скинового времени к звуковому и альфеновскому, соответственно, $M^2 = \gamma_0 \beta N^2$, где γ_0 – показатель адиабаты (в высокотемпературной плазме $N >> 1$), v_0 – магнитная яма в токамаке [7].

Можно показать, что в обратном предельном случае $\gamma^2 << M^2/\Gamma^2$ неустойчивость существенно ослабляется. Условие $\gamma^2 >> M^2/\Gamma^2$ в обычных обозначениях выглядит как $\gamma^2 >> K_\parallel^2 C_s^2$ и означает, что усредненное возмущение давления не успевает выравниваться вдоль силовых линий.

Анализ уравнения (3) показывает, что вид его потенциала существенно зависит от величин отношений S/S_k ($S_k = a^{1/2}/Nv_0^{1/2}$), a/a_k (a_k определяется из условия $a/2 = v_0$) и β/β_k ($\beta_k = a^{4/3}/N^{2/3}$). При очень малых ширах $S \lesssim S_k$ и давлениях $\beta << \beta_k$ из уравнения (3) следует, как и в работе [9], малый инкремент порядка обратного скинового времени $\Gamma = a/2v_0$.

В настоящей работе будут рассматриваться системы с широм, представляющим практический интерес $S \sim 1$ (естественно, $S >> S_k$). Будем решать уравнение (3) вариационным методом. Запишем функционал, соответствующий этому уравнению, и подставим в качестве пробной функции функцию вида: $P = 1/(\lambda^2 + y^2)$, где λ – вариационный параметр.

После варьирования получим выражения для определения инкремента и параметра λ:

$$(\Gamma^3 + \gamma_0 \beta N^2 \Gamma)\left[1 - N^2\left(\frac{a^2}{2} - \nu v_0\right)/2S^2\Gamma^2\lambda^2\right] = a^2N^2/2, \qquad (4)$$

$$N^2\left(\frac{a^2}{2} - av_0\right)/\Gamma^2\lambda^2 + S^3\Gamma^{1/2}\lambda/N = N^2/\Gamma\lambda^4. \qquad (5)$$

В случае больших давлений при $\beta >> \beta_k$, когда существенно возмущение магнитного поля, выражение для инкремента имеет вид

$$\Gamma = \frac{N^{2/3}}{S^{2/3}}\left(\frac{a^2}{2} - av_0\right)^{2/3} \quad a \gtrsim a_k; \quad \Gamma = 0 \quad a \lesssim a_k. \qquad (6)$$

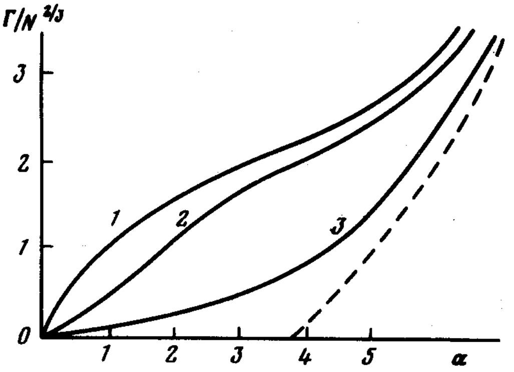
Этот инкремент соответствует непотенциальной гравитационно-диссипативной неустойчивости [1, 2], имеющей пороговый характер по градиенту давления.

В случае малых давлений плазмы при $\beta \lesssim \beta_k$ и $a \lesssim a_k$. Из (4), (5) можно получить соотношение

$$\Gamma^3 + \gamma_0 \beta N^2 \Gamma = a^2 N^2/2. \qquad (7)$$

Из этого выражения следует качественно новый результат: инкремент диссипативный баллонных мод не имеет порога по градиенту давления. Неустойчивость начинает развиваться при любом сколь угодно малом градиенте с инкрементом $\Gamma \sim a^{2/3} N^{2/3}$ ($\gamma \sim 1/\tau_s (\tau_s/\tau_\theta)^{2/3}$). Таким образом полностью снимается парадокс, о котором говорилось выше.

Общий случай изображен на рисунке, где представлена зависимость инкремента диссипативных баллонных мод от величины градиента давления плазмы a при различных значениях величины давления. Кривая *1* соответствует β равному нулю или полностью сжимаемой жидкости $\gamma_0 = 0$, кривая *2* построена при $\tilde{\beta} = \beta\,\gamma_0 N^{2/3} = 1$, кривая *3* – при $\tilde{\beta} = 10$.



Изображена зависимость инкремента $\Gamma/N^{2/3}$ от a при различных значениях $\tilde{\beta} = \beta\gamma_0 N^{2/3}$: *1* – $\tilde{\beta} = 0$; *2* – $\tilde{\beta} = 1$; *3* – $\tilde{\beta} = 10$. Пунктирная кривая изображает пороговый инкремент (6)

Между кривыми *2* и *3* лежит область, соответствующая высокотемпературной плазме. Пунктирная кривая изображает пороговый инкремент (6), при получении которого фактически предполагалось, что скорость звука бесконечна. При этом ионный звук выравнивал возмущения давления вдоль силовых линий и при $a < a_k$ неустойчивость не развивалась. При учете конечности скорости ионного звука картина принципиально иная: возмущения давления не успевают выравниваться вдоль силовых линий и при любом градиенте давления существует баллонная неустойчивость, развивающаяся на альфеновских колебаниях. Инкремент этих диссипативных баллонных мод уменьшается при увеличении давления плазмы, что видно из рисунка

Оценка коэффициентов переноса по соотношению $\chi \sim \gamma/K_\perp^2$ показывает, что они порядка aa^2/r_s, т. е. порядка псевдоклассических.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить академика Б.Б.Кадомцева за полезные обсуждения и советы.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
4 марта 1980 г.

Литература

[1] A.H.Glasser, I.M.Greene, I.L.Johnson. Phys. Fluids, **18**, 875, 1975.

[2] A.B.Mikajlovskii. Nucl. Fusion, **15**, 95, 1975.

[3] C.Mercier. Nucl. Fusion, **1**, 47, 1960.

[4] О.П.Погуце, Э.И.Юрченко. Письма в ЖЭТФ, **28**, 344, 1978.

[5] Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце. Вопросы теории и плазмы. Вып. 5, М., Атомиздат, 209, 1967.

[6] I.W.Connor, R.I.Hastie, I.B.Taylor. Phys. Rev. Lett., **40**, 396, 1978.

[7] В.Д.Шафранов, Э.И.Юрченко. ЖЭТФ, **53**, 1157, 1967.

[8] О.П.Погуце, Э.И.Юрченко. Физика плазмы, **5**, 786, 1979.

[9] G.Bateman, O.B.Nelson. Phys. Rev. Lett., **41**, 805, 1978.