Письма в ЖЭТФ, том 31, вып.9, стр. 560 – 563 *5 мая 1980 г.*

ДЛИННОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА МНОГОЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА ОДНОМЕРНОГО БОЗЕ-ГАЗА

В.Н.Попов

Методом континуального интегрирования получена длинноволновая асимптотика всех многочастичных функций Грина одномерного бозе-газа с точечным взаимодействием.

Одномерный бозе-газ с точечным взаимодействием – вполне интегрируемая динамическая система. Соответствующее квантовое нелинейное уравнение Шредингера можно решить как с помощью анзатца Бете [1], так и квантовым методом обратной задачи [2]. В настоящее время на очереди – нахождение функций Грина вполне интегрируемых систем. Эта задача пока решена только для системы непроницаемых бозонов [3, 4] – бозе-газа с бесконечно большой константой взаимодействия.

В настоящей работе найдена асимптотика всех многочастичных функций Грина

$$< \psi(x_1, t_1) \dots \psi(x_n, t_n) \bar{\psi}(x_1', t_1') \dots \bar{\psi}(x_n', t_n') > \qquad (1)$$

для бозе-газа с произвольной константой взаимодействия при $T = 0$ в пределе $|x_i - x_j| \to \infty$. Метод, развитый ранее [5, 6] для описания двумерных и одномерных сверхтекучих систем (см. также [7]) позволяет вычислить асимптотику среднего (1) в евклидовой области (при замене $t \to i\tau$). Обозначив

$$z_i = (x_i, \tau_i), \quad z_{n+i} = (x_i', \tau_i'), \quad i = 1, \dots, n; \qquad (2)$$

$$|z_i - z_j|^2 = (x_i - x_j)^2 + c^2(\tau_i - \tau_j)^2, \qquad (3)$$

$$e_i = 1, \quad i = 1, \dots, n; \; e_i = -1, \quad i = n+1, \dots, 2n \qquad (4)$$

можно записать основной результат для функции Грина (1) в евклидовой области в виде

$$\prod_{i<j} (G(z_i - z_j))^{-e_i e_j}. \qquad (5)$$

Здесь $G(z_i - z_j)$ – одночастичная функция Грина, имеющая при больших $|z_i - z_j|$ асимптотику

$$G(z_i - z_j) \approx \rho \left| \frac{z_i - z_j}{R} \right|^{-\gamma}, \qquad (6)$$

$$\gamma = mc/2\pi\rho. \qquad (7)$$

В (6), (7) m – масса бозе-частицы, ρ – плотность системы, c – скорость звука. Постоянная R выбрана так, чтобы коэффициент перед $|(z_i - z_j)/R|^{-\gamma}$ в (6) был равен ρ. Асимптотика (6) для одночастичной функции и показатель (7) были получены в [5]. Формула (5) обобщает асимптотику (6) на случай n-частичной функции Грина. Можно интерпретировать (5) как функцию распределения системы $2n$ двумерных кулоновских зарядов $e_i = \pm 1$, находящихся в точках с комплексными координатами $z_i = x_i + ic\tau_i$ при температуре γ.

Для вывода (5) запишем среднее (1) как континуальный интеграл по полям $\psi(x, \tau)$, $\bar{\psi}(x, \tau)$ и используем идею интегрирования по быстрым и медленным переменным [5, 6]. После интегрирования по быстрым полям можно записать среднее (1) в евклидовой области в виде

$$< \psi_o (x_1, \tau_1) \dots \psi_o (x_n, \tau_n) \overline{\psi_o} (x_1', \tau_1') \dots \overline{\psi_o} (x_n', \tau_n') >_o . \quad (8)$$

Здесь ψ_o, $\overline{\psi_o}$ – медленные поля с фурье-компонентами к меньше некоторого k_o, $< \dots >_o$ – усреднение по медленным полям с весом $\exp S_h$, где S_h – функционал гидродинамического действия, вычисленный в [5, 6].

В интеграле по медленным полям перейдем к переменным плотность – фаза

$$\psi_o (x, \tau) = \rho^{1/2} (x, \tau) e^{i\phi (x,\tau)}, \quad \overline{\psi_o}(x, \tau) = \rho^{1/2}(x, \tau) e^{-i\phi (x,\tau)}, \quad (9)$$

а S_h возьмем в виде квадратичной формы [6]

$$\int dx\, d\tau \left(- \frac{p_\mu}{2m} (\partial_x \phi)^2 - \frac{p_{\mu\mu}}{2} (\partial_\tau \phi)^2 + i p_{\mu\rho_o} \pi \partial_\tau \phi + \frac{1}{2} p_{\rho_o\rho_o} \pi^2 \right) . \quad (10)$$

Здесь

$$\pi (x, \tau) = \rho (x, \tau) - \rho_o (k_o), \quad (11)$$

а $\rho_o (k_o)$ определяется условием $\partial p / \partial \rho_o = 0$, где $p = S_h / \beta V$ вычислено при $\phi (x, \tau) = 0$, $\rho (x, \tau) = \rho_o = \mathrm{const}$. Коэффициенты p_μ, $p_{\mu\mu}$ $p_{\mu\rho_o}$, $p_{\rho_o\rho_o}$ – производные от p по химическому потенциалу μ и переменной ρ_o. В одномерном случае при $T = 0$ величина $\rho_o (k_o)$ пропорциональна k_o^γ и исчезает при $k_o \to 0$. Однако существенно то, что $\rho_o (k_o)$ существует при всех отличных от нуля k_o. Это приводит к функционалу S_n (10), характерному для сверхтекучих бозе-систем.

Перепишем среднее (8) в переменных ϕ, π

$$< \prod_{i=1}^{2n} [\rho_o (k_o) + \pi (z_i)]^{1/2} \exp i \sum_{i=1}^{2n} e_i \phi (z_i) >_o . \quad (12)$$

Величины $\pi(z_i)$ малы по сравнению с $\rho_o (k_o)$ и не дают вклада в первый член асимптотики, так что в первом приближении первый из усредняемых в (12) множителей равен $(\rho_o (k_o))^n$. Взяв S_h в виде квадратичной формы (10), приходим к гауссову интегралу. В результате для среднего (12) получим

$$(\rho_o (k_o))^n \exp\left(- \frac{1}{2} < (\sum_i e_i \phi (z_i))^2 >_o \right) =$$

$$= (\rho_o (k_o))^n \exp\left\{ - \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_{|k| < k_o} dk\, d\omega\, g_{\phi\phi} (k, \omega) \left| \sum_i e_i e^{i(\omega\tau_i + k x_i)} \right|^2 \right\}, \quad (13)$$

где

$$g_{\phi\phi}(k,\omega) = \frac{m}{\rho\left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}, \tag{14}$$

есть коррелятор $<\phi\phi>_0$ в (k,ω) – представлении. Заметим, что форма (14) функции $g_{\phi\phi}$ не зависит от размерности системы. Вычислив показатель экспоненты в (13) в пределе $|z_i - z_j| \to \infty$, получим вместо (13)

$$(\rho_0(k_0))^n \exp\left\{-\gamma n(\ln k_0 R + C) + \gamma \sum_{i<j} e_i e_j \ln(|z_i - z_j|/R)\right\}. \tag{15}$$

Здесь γ – показатель (7), C – постоянная Эйлера, R – постоянная размерности длины (на самом деле (14) не зависит от выбора R). Так как (15) не должно зависеть от вспомогательного параметра k_0, $\rho_0(k_0)$ должно быть пропорционально k_0^γ. Выберем теперь R так, чтобы была верна формула

$$\rho_0(k_0) = \rho(k_0 R)^\gamma e^{\gamma C}. \tag{16}$$

Подстановка (16) в (13) дает основной результат (5).

Величину R можно вычислить в пределе $\gamma \to 0$, которому соответствует случай бозе-газа со слабым взаимодействием (большой плотности), обратный случаю непроницаемых бозонов, где константа связи бесконечна, а $\gamma = 1/2$. В пределе $\gamma \to 0$

$$R = (4mc)^{-1} e^{(2-C)} \approx 1{,}037\,(mc)^{-1}. \tag{17}$$

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А.Стеклова

Поступила в редакцию
3 марта 1980 г.

Литература

[1] E.H.Lieb, W.Liniger. Phys. Rev., **130**, 1605, 1963; E.H.Lieb. Phys. Rev., **130**, 1616, 1963.

[2] Е.К.Склянин, Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, **243**, 1430, 1978; Л.Д.Фаддеев. Препринт ЛОМИ Р-2-79.

[3] A.Lenard. J. Math. Phys., **5**, 930, 1964; **7**, 1268, 1966.

[4] M.Limbo, T.Miwa, Y.Mori, M.Sato. Preprint RIMS-309, 1979.

[5] В.Н.Попов. ТМФ, **11**, 354, 1972.

[6] В.Н.Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976.

[7] В.Л.Березинский. ЖЭТФ, **61**, 1144, 1971.