Письма в ЖЭТФ, том 31, вып.11, стр. 631 – 635 *5 июня 1980 г.*

РОЖДЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В.Н.Лукаш

Построена квантовая теория адиабатических возмущений вещества в космологии Фридмана. Показано, что механизм спонтанного рождения фононов вблизи космологической сингулярности может привести к формированию начального спектра адиабатических возмущений плотности вещества.

Потенциальные движения идеальной жидкости в общей теории относительности могут быть описаны единственной скалярной функцией – потенциалом $\phi = \phi(x)$, градиент которого пропорционален 4-импульсу частицы вещества:

$$wu_i = \phi_{,i}, \tag{1}$$

где u^i – 4-скорость вещества ($u_i u^i = 1$),

$$w = \frac{\epsilon + p}{n} = (\phi_{,i}\, \phi_{,k}\, g^{ik})^{1/2} \tag{2}$$

– удельная энтальпия, p – давление, ϵ – плотность вещества;

$$n = \frac{dp}{dw} = \exp \int \frac{d\epsilon}{\epsilon + p} \tag{3}$$

– плотность числа частиц, $(nu^i)_{;i} = 0$ (точка с запятой означает ковариантную производную в метрике g_{ik}). Все величины w, p, ϵ и n связаны друг с другом уравнением состояния вещества $p = p(w)$.

Уравнения Эйнштейна $G_i^k = (\epsilon + p)\, u_i u^k - p\,\delta_i^k$, описывающие воздействие потенциальных движений (1) на геометрию пространства-времени, получаются при приравнивании к нулю первой вариации действия ($c = \hbar = 8\pi G = 1$)

$$W = W[\phi, g^{ik}] = \int \left(p - \frac{1}{2} R\right) \sqrt{-g}\, d^4 x \tag{4}$$

по метрике g^{ik} при фиксированной функции ϕ, $g = \det\{g_{ik}\}$, $R = R_i^i = -G_i^i$ – скалярная кривизна.

Рассмотрим малые возмущения точных решений типа (1). В этом случае функция ϕ является суммой известной функции $\phi^{(o)}$, определяющей фоновое решение, и малой функции $\delta\phi = \Phi$, являющейся предметом анализа:

$$\phi = \phi^{(o)} + \Phi, \quad g^{ik} = g^{ik(o)} - h^{ik}. \tag{5}$$

Малый тензор h^{ik} является линейной функцией скаляра Φ. (В первом порядке по Φ гравитационные волны не генерируются). Лагранжиан линеаризованных уравнений Эйнштейна получается после разложения подынтегрального выражения (4) вплоть до второго порядка по Φ и h^{ik}:

$$W^{(2)} = W[\Phi, \psi_i^k] = \int L \sqrt{-g^{(0)}}\, d^4x,$$

$$L = \frac{\epsilon + p}{2}(v_i v^i - 2 v_i \psi_n^i u^k - \kappa^2 (1 - \beta^{-2})) +$$

$$+ \frac{\epsilon - p}{8}(\psi_{ik}\psi^{ik} - \frac{1}{2}\psi^2) + \frac{1}{8}(\psi_{ik;l}\psi^{ik;l} - 2\psi_{ik;l}\psi^{il;k} - \frac{1}{2}\psi_{,l}\psi^{,l}), \tag{6}$$

где $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} h_l^l \delta_i^k$, $\psi = \psi_i^i = -h_i^i$, $v_i = \frac{\Phi_{,i}}{w}$, $\kappa = v_i u^i - \frac{1}{2} h_i^k u^i u_k$,

$\beta = \left(\frac{dp}{d\epsilon}\right)^{1/2} = \left(\frac{d\ln w}{d\ln n}\right)^{1/2}$ – скорость звука. (Все операции производятся в фоновой метрике g_{ik}, здесь и далее индекс $(^{\circ})$ опущен). Возмущенные уравнения Эйнштейна получаются при вариации $\delta W^{(2)} = 0$ по ψ_i^k при фиксированных Φ и фоновой метрике:

$$\psi_{i;l}^{k;l} - \psi_i^{l;k}{}_l - \psi^{kl}{}_{;il} - \frac{1}{2}\psi_{;l}^{;l}\delta_i^k = (\epsilon - p)(\psi_i^k - \frac{1}{2}\psi\delta_i^k) +$$

$$+ 2(\epsilon + p)[-v_i u^k - u_i v^k + \kappa(1 - \beta^{-2})(u_i u^k - \frac{1}{2}\delta_i^k)]. \tag{7}$$

Нас будет интересовать задача Коши уравнений (7). Фоновым пространством является однородная изотропная Вселенная. Гидродинамические возмущения в моделях Фридмана впервые исследовал Лифшиц [1]. Филд и Шепли [2], используя метод Лифшица, получили уравнение второго порядка для эволюции фурье-компоненты инвариантных возмущений плотности $\delta\epsilon$. Наша задача состоит в построении двух канонически сопряженных инвариантных скаляров, описывающих эволюцию двух физических степеней свободы потенциальных возмущений и являющихся аналогами потеницала скорости и возмущений плотности в стационарной (ньютоновской) среде [3].

Выберем синхронную систему отсчета, в которой скаляр $\phi^{(0)}$ зависит от мирового времени t:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})\, dx^\alpha dx^\beta \tag{8}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ – единичный тензор, функция $a = a(t)$ определена равенствами:

$$\epsilon = 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2, \quad \epsilon + p = -2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{\bullet}, \tag{9}$$

где $(^{\bullet}) = \frac{\partial}{\partial t}$ • $h_{\alpha\beta}$ – малый тензор в евклидовом пространстве

$\mathbf{x} = \{x^a\} = (x, y, z)$. Общий вид $h_{\alpha\beta}$ (A и B – скаляры линейные по Φ):

$$h_{\alpha\beta} = A\,\delta_{\alpha\beta} + B_{,\,\alpha\beta}\,. \qquad (10)$$

Для гидродинамических величин имеем

$$\frac{\delta w}{w} = \frac{\dot{\Phi}}{w} = \dot{v} - 3\,\beta^2\,\frac{\dot{a}}{a}\,v\;,\quad \delta u^{\circ} = 0,\;\; u_a = v_{,\,a}\,, \qquad (11)$$

где $v = \Phi / w$. Калибровочная свобода в выборе скаляров v, A и B обусловлена произволом в построении синхронной системы отсчета (8) и имеет вид [4]:

$$\tilde{v} = v + \frac{1}{2}F\;,\;\; \tilde{A} = A + \frac{\dot{a}}{a}\,F\;,\;\; \tilde{B} = B + F\int\frac{dt}{a^2}\;, \qquad (12)$$

где $F = F(\mathbf{x})$ – произвольная малая функция пространственных координат. Отсюда следует, что скаляр

$$q = q(t, \mathbf{x}) = 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\,v - \frac{1}{2}A\right) \qquad (13)$$

калибровочно инвариантен. Из уравнений (7) получаем формулы, связывающие скаляры v, A и B с функцией q :

$$v = \frac{a}{3\,\dot{a}}\,q - \frac{1}{2}\,Q\;,\quad A = -\frac{\dot{a}}{a}\,Q\;,$$
$$\dot{B} = -\frac{1}{a^2}\,Q + \frac{1}{a^3}\int a\,\gamma\,q\,dt\;,\quad Q = Q(t, \mathbf{x}) = \int\gamma\,q\,dt \qquad (14)$$

и уравнение для скаляра q , описывающее эволюцию двух физических степеней свободы потенциальных возмущений идеальной жидкости в пространственно-плоской космологии Фридмана:

$$q'' + 2\,\frac{\xi'}{\xi}\,q' - \beta^2\,\Delta q = 0, \qquad (15)$$

где $\gamma = 1 + \dfrac{p}{\epsilon}$, $\xi = \dfrac{a}{\beta}\left(\dfrac{\gamma}{3}\right)^{1/2}$, $(\,')= a\,\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. После подстановки (14) в (6) довольно длинные вычисления приводят к выводу, что лагранжиан

$$\tilde{L} = \tilde{L}(q) = \frac{\xi^2}{2\,a^4}\left(q'^{\,2} - \beta^2\,q_{,\,a}\,q^{,\,a}\right), \qquad (16)$$

вариация которого по q ($\delta\, W^{(2)} = 0$) приводит к уравнению (15), отличается от L лишь дивергенционным членом. Обозначим через $\sigma = \sigma(t, \mathbf{x}) = \partial a^3\tilde{L} / \partial\dot{q} = a^2\,q'$ канонически-сопряженный к q калибровочно инвариантный скаляр. Из (11) имеем

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \gamma \frac{\delta n}{n} = \frac{\sigma}{\dot{a} a^2} + \gamma \left(-\dot{q} + \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} Q \right). \tag{17}$$

Каноническое квантование потенциальных возмущений (звуковых волн) базируется на лагранжиане $\widetilde{L}$ и основано на одновременном коммутационном соотношении для канонически-сопряженных операторов q и σ :

$$[q(t, \mathbf{x}) \sigma(t, \mathbf{y})] = q\sigma - \sigma q = i\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{18}$$

аналогичном правилу коммутации между операторами потенциала скорости (14) и возмущенной плотности (17) в стационарной среде [3].

В представлении чисел заполнения фононов с заданным 3-импульсом $\mathbf{k}$, оператор поля q имеет вид ($k = |\mathbf{k}|$)

$$q = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \nu_{\mathbf{k}}(t) + a^+_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kx}} \nu^*_k(t) \right), \tag{19}$$

где $a_{\mathbf{k}}$ и $a^+_{\mathbf{k}}$ – операторы уничтожения и рождения фононов, удовлетворяющие бозевским коммутационным соотношениям (см. (18))

$$[a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k}'}] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{20}$$

Из (15) следует важный физический выход: уравнение для звуковых волн в расширяющейся Вселенной конформно инвариантно уравнению для распространения звука в плоском мире только в том случае, когда $a'' = 0$. Таким свойством обладает Вселенная, заполненная ультрарелятивистскими частицами с уравнением состояния $p = \epsilon/3$. В этом мире фононы не рождаются. Во всех случаях, когда $a'' \neq 0$, в процессе космологического расширения происходит спонтанное рождение звуковых колебаний. Этот механизм может, в принципе привести к формированию начального спектра возмущений плотности в рамках адиабатической теории возникновения галактик [5] в результате генерации длинных волн. Отметим, что внешнее сходство уравнения (15) с соответствующим уравнением для амплитуды гравитационных волн в модели Фридмана позволяет перенести на случай фононов основные выводы для длинноволновой части спектра [6, 7].

Из формул (17) – (20) получаем корреляционную функцию флуктуации плотности на сечении t = const в асимптотической области $t >> 1$ (в обычных единицах $t >> (G\hbar/c^5)^{1/2}$ на стадии расширения $p = \epsilon/3$ ($a = \sqrt{t}$):

$$< \frac{\delta \epsilon}{\epsilon}(\mathbf{x}) \frac{\delta \epsilon}{\epsilon}(\mathbf{x}') > = C_0 \int_{k_D}^{\infty} k^3\, dk\, |\beta_k|^2 \frac{\sin \zeta}{\zeta}, \tag{21}$$

где $c_0 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{4}{3} \right)^{3/2}$, $\zeta = k\,|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. β_k – коэффициент неадиабатического усиления, вычисляемый в классической задаче о рассеянии волны aq (см. (15)) на эффективном потенциале $U = \xi'' / \xi$. Интегрирование в формуле (21) распространяется на масштабы меньше Джинсовского $k_D = (3/4t)^{1/2}$.

Автор благодарен Я.Б.Зельдовичу, И.Д.Новикову и Д.А.Компанейцу за плодотворные обсуждения работы и ценные замечания.

Институт космических исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 марта 1980 г.

Литература

[1] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, **16**, 587, 1946.

[2] G.B. Field, L.C.Shepley. Astr. and Spa. Sci., **1**, 309, 1968.

[3] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Статистическая физика, часть 2, §24, М., изд. Наука, 1978.

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., изд. Наука, 1967.

[5] Я.Б.Зельдович. MNRAS, **160**, 1p, 1972.

[6] Л.П.Грищук. ЖЭТФ, **67**, 825, 1974.

[7] L.H. Ford., L. Parker. Phys. Rev. D, **16**, 1601, 1977.