

## МЕХАНИЗМ СТОХАСТИЧНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ ЯНГА – МИЛЛСА

А.Р. Авакян, С.Г. Арутюнян, Г.З. Басеян

Исследована механическая система с ненулевым моментом, соответствующая пространственно-однородным полям Янга – Миллса. Проведен численный эксперимент этой системы на ЭВМ. Найден механизм стохастичности.

В работе <sup>1</sup> показано, что анализ пространственно-однородных (П-О) решений классических уравнений Янга – Миллса (ЯМ) сводится к исследованию механических систем, в <sup>2, 3</sup> было показано, что система с гамильтонианом  $H = 1/2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 y^2)$ , описывающая взаимодействие двух цветовых степеней свободы, стохастична. В общем случае <sup>4</sup> задачу П-О полей ЯМ можно свести к исследованию механической системы с гамильтонианом

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + \dot{R}^2) + \frac{\mu^2}{32} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{4} (r^2 - R^2)^2, \quad (1)$$

где  $\mu$  – аналог механического момента. Система, рассмотренная в <sup>2, 3</sup> соответствует  $\mu = 0$ .

Масштабные преобразования  $r \rightarrow (\mu/4)^{1/3} r$ ,  $R \rightarrow (\mu/4)^{1/3} R$ ,  $t \rightarrow (\mu/4)^{-1/3} t$  приводят гамильтониан (1) к виду

$$E = \epsilon (4/\mu)^{4/3} = 1/2 (\dot{r}^2 + \dot{R}^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{2} (r^2 - R^2)^2 \quad (2)$$

с уравнениями движения

$$\ddot{r} = \frac{1}{r^3} - r(r^2 - R^2); \quad \ddot{R} = \frac{1}{R^3} + R(r^2 - R^2). \quad (3)$$

В переменных  $x = r - R$ ,  $y = r + R$  гамильтонианы (2) и система (3) имеют вид

$$2E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{4}{(y+x)^2} + \frac{4}{(y-x)^2} + \frac{x^2 y^2}{2}, \quad (4)$$

$$\ddot{x} = \frac{8}{(y+x)^3} - \frac{8}{(y-x)^3} - x y^2, \quad (5a)$$

$$\ddot{y} = \frac{8}{(y+x)^3} + \frac{8}{(y-x)^3} - y x^2. \quad (5b)$$

Эквипотенциальные линии системы (5) можно параметризовать в виде

$$x = \pm \left[ -2\sqrt{s} - \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{1}{s^2} + 4s + 4U} \right]^{1/2}; \quad y = \left[ 2\sqrt{s} - \frac{1}{s} + \sqrt{\frac{1}{s^2} + 4s + 4U} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где  $s \geq 1/U^2$ . Заметим, что движение частицы с энергией  $E$  происходит внутри области, ограниченной линией (6) со значением потенциальной энергии  $U = E$ . Данная область делится на область отрицательных и положительных значений  $y$  — компоненты силы (5б); последнюю назовем „каналом”.

Интересным представляется вопрос: может ли частица уйти по „каналу” на бесконечность. Внутри „канала” при больших  $y$  движение по  $y$  определяется соотношением  $y(t) = \left[ \frac{16}{c} + ct^2 \right]^{1/2}$ . Движение по  $x$  при этом определяется уравнением  $\ddot{x} + \left( \frac{16}{c} + ct^2 \right) x = 0$ . Видно, что при  $t \geq 4/c$ , амплитуда  $x$ -колебаний падает как  $t^{-1/2}$ , в то время как ширина „канала” уменьшается как  $y^{-2} \sim t^{-2}$ . Это показывает, что частица уйти на бесконечность по каналу не может.

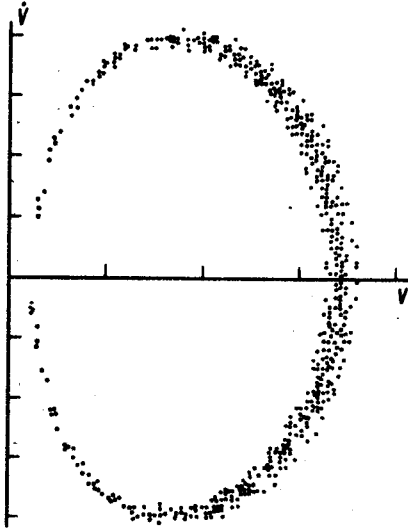


Рис. 1

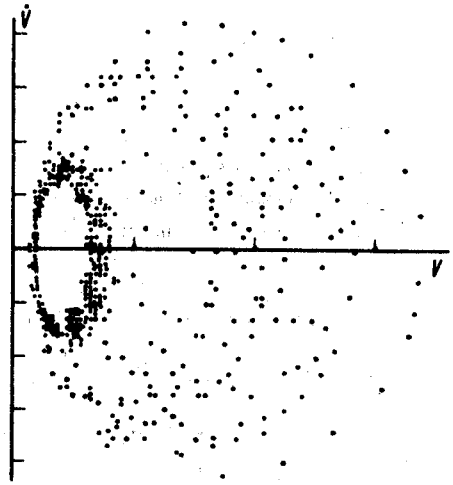


Рис. 2

В области  $x \ll y$  система (5) описывается приближенными уравнениями

$$\ddot{x} + xy^2 = 0; \quad \ddot{y} - \frac{16}{y^3} + x^2y = 0. \quad (7)$$

Заметим, что здесь координата  $x$  сильно осциллирует, поэтому удобно ввести следующую параметризацию <sup>5</sup>

$$x = \alpha \rho(t)^{-1/2} \sin \left( \int_0^t \rho(z) dz + \varphi \right). \quad (8)$$

Система (7) при этом примет вид

$$\sqrt{\rho} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho}} \right) + y^2 = \rho^2; \quad \ddot{y} = \frac{16}{y^3} - \alpha^2 \frac{y}{\rho} \sin^2 \left( \int_0^t \rho(z) dz + \varphi \right). \quad (9)$$

С точностью до членов  $x^2/y^2$  из первого уравнения имеем  $\rho = y$ . При этом видно, что второй член в последнем уравнении (8) можно рассматривать как внешнюю быстро осциллирующую силу, обеспечивающую возникновение эффективной потенциальной ямы для движения по  $y$ . Усредняя по времени член  $\sin^2 \left( \int_0^t \rho(z) dz + \varphi \right)$ , найдем, что потенциальная яма имеет

вид  $U = \frac{8}{y^2} + \frac{\alpha^2 y}{2}$ . Существенно, что  $\alpha$  не является величиной, универсальной для всех

траекторий, а определяется начальными условиями. Заметим, что эффект появления области устойчивых  $y$ -колебаний аналогичен эффекту Капицы <sup>5</sup>. Движение на дне ямы соответствует малым значениям энергии ( $E \ll 1$ ). Отметим, что при малых энергиях вся допустимая область движения удовлетворяет условию  $y \gg x$ .

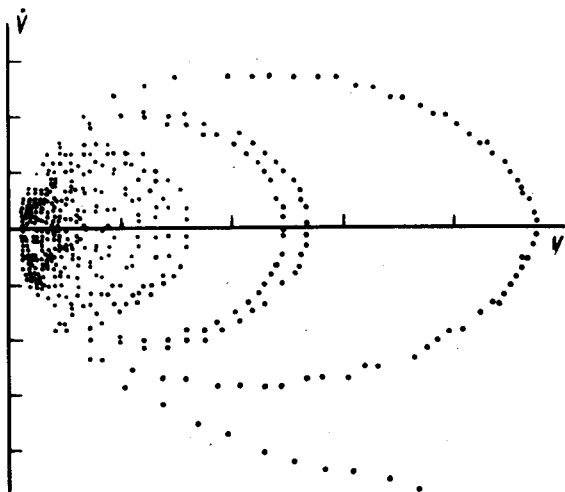


Рис.3.

Система (5) численно анализировалась на ЭВМ. Движение частицы рассматривалось при различных начальных условиях для нескольких значений энергии. Отметим, что из-за наличия интеграла движения (4) фазовое пространство трехмерно. В качестве независимых координат выбраны величины  $u = xy$ ,  $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ,  $v'$ . На рис.1 приведены пересечения фазовой траектории частицы с энергией  $E \approx 1$  с плоскостью  $u = 0$ . Видно, что для такой энергии система (5) близка к интегрируемой. Асимметрия рисунка связана с тем, что правая часть эффективной ямы сохраняет свою форму только в среднем. При увеличении  $E$  ширина линии овала увеличивается, достигая его размеров при  $E = 1,3 \div 1,4$ . Рис.2 соответствует случаю  $E = 1,4$ . При дальнейшем повышении энергии поведение фазовых траекторий качественно меняется, возникают овалы разных размеров, причем размытие их уменьшается. Рис.3 соответствует случаю  $E = 3$ . Такое поведение системы может быть понято из следующего качественного анализа. С увеличением  $E$  минимальное значение  $y_{min} = 2/\sqrt{E}$  координаты  $y$  уменьшается, в то время, как  $x_{max}$  растет. При этом, начиная с некоторого  $E$  частица может попасть в „корневую область”  $x \sim y$ , где понятие эффективной потенциальной ямы отсутствует. Здесь на частицу в среднем действует сила с положительной  $y$ -компонентой, выталкивающая частицу из корневой области. Дальнейшее движение существенно зависит от параметра  $\alpha$ . В зависимости от сложного движения в „корневой” области  $\alpha$  принимает практически случайное значение. Сингулярность в определении амплитуды колебания  $y_{max} \sim 2E/\alpha^2$  показывает, что  $y_{max}$  может принимать сколь угодно большие значения.

Случайное переопределение параметра  $\alpha$  в „корневой” области можно рассматривать как своеобразный механизм стохастичности.

Авторы выражают благодарность А.Ц. Амадуни, С.Г. Матияну, Г.А. Нагорскому за полезные обсуждения.

#### Литература

1. Басеян Г.З., Матиян С.Г., Саввиди Г.К. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, 641.
2. Матиян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г. ЖЭТФ, 1981, 80, 830.
3. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Письма в ЖЭТФ, 1981, 34, 171.
4. Басеян Г.З. Препринт ЕФИ-573 (60)-82.
5. Капица П.Л. УФН, 1951, 44, 7.

Поступила в редакцию  
17 августа 1982 г.