Термодинамические неравенства в сверхтекучей жидкости

А. Ф. Андреев[+*1)], *Л. А. Мельниковский*[+1)]

[+]*Институт физических проблем им. П. Л. Капицы РАН, 119334 Москва, Россия*

[*]*Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, FIN-02015 HUT, Finland*

Поступила в редакцию 3 октября 2003 г.

Изучаются общие условия термодинамической устойчивости сверхтекучей жидкости в полном пространстве термодинамических переменных, содержащем (наряду с обычными термодинамическими координатами, такими как давление и температура) скорость сверхтекучего движения и плотность импульса. Условия устойчивости приводят к термодинамическим неравенствам, заменяющим критерий сверхтекучести Ландау при конечных температурах.

PACS: 61.72.Ji, 67.40.–w, 68.35.Ct

1. Введение. Экспериментально наблюдаемое разрушение сверхтекучести обычно связано с рождением вихрей и происходит при скоростях значительно меньших, чем критическая скорость Ландау. Поэтому в уравнениях сверхтекучей гидродинамики достаточно ограничиться первыми неисчезающими членами в разложении по степеням малых скоростей.

Однако существует ряд экспериментов[1] по изучению сверхтекучего движения сквозь узкие отверстия. В этих условиях максимальная скорость является убывающей функцией ширины отверстия и при достаточно маленьком сечении может достигать значений порядка критической скорости Ландау. Таким образом, все термодинамические величины становятся нетривиальными функциями не малых скоростей (то есть они зависят не только от обычных термодинамических переменных, таких как давление и температура). В такой общей постановке, не делая никаких предположений о малости скоростей (используя только изотропию покоящейся жидкости) мы находим полный набор термодинамических неравенств, то есть условий, налагаемых на термодинамические функции требованием устойчивости сверхтекучего состояния.

В рамках фононно-ротонной модели мы вычисляем максимальную скорость, совместную с полученными термодинамическими неравенствами, и показываем, что ее можно интерпретировать как обобщение критической скорости Ландау на конечные температуры. Такой термодинамический сценарий разрушения сверхтекучести, возможно, имеет место в экспериментах по критическим скоростям в узких отверстиях.

2. Устойчивость. При выводе общих уравнений сверхтекучей гидродинамики предполагается [2], что каждый малый элемент жидкости находится в локальном равновесии, и это равновесие устойчиво. Для устойчивости состояния необходимо, чтобы оно реализовывало максимум (по меньшей мере локальный) энтропии для замкнутой системы. Вместо исследования условий максимальности энтропии, оказывается более удобным [3] использовать эквивалентное условие – условие минимальности энергии при постоянных энтропии и аддитивных интегралах движения.

Полную энергию жидкости $E_{\rm tot}$ можно представить в виде интеграла от плотности энергии E по всему объему $E_{\rm tot} = \int E d\mathbf{r}$. Плотность энергии получается при помощи преобразования Галилея

$$E = \frac{\rho v_{\rm s}^2}{2} + \mathbf{v}_{\rm s}\mathbf{j}_0 + E_0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_{\rm s}$ – сверхтекучая скорость, ρ – плотность массы, а индекс 0 используется для обозначения величин, измеренных в системе отсчета, связанной со сверхтекучей компонентой (то есть системы, в которой сверхтекучая скорость равна нулю). Таким образом, E_0 и $\mathbf{j}_0$ – это плотность энергии и плотность импульса относительно сверхтекучей компоненты. Первая является функцией ρ, $\mathbf{j}_0$ и плотности энтропии S. Дифференциал E_0 можно записать в виде

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + \mathbf{w}d\mathbf{j}_0, \qquad (2)$$

где лагранжевы множители T, μ и $\mathbf{w}$ имеют смысл температуры, химического потенциала и так называемой относительной скорости нормальной и сверхтекучей компонент.

1)e-mail: andreev@kapitza.ras.ru; leva@kapitza.ras.ru

Изотропия жидкости позволяет получить полезное соотношение на частные производные $\mathbf{j}_0$ по $\mathbf{w}$:

$$\left(\frac{\partial j_0^k}{\partial w^l}\right)_{T,\rho} = \frac{w^k w^l}{w^2}\left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} + \left(\frac{\delta^{kl}}{w} - \frac{w^k w^l}{w^3}\right) j_0. \tag{3}$$

Действительно, скорость $\mathbf{w}$ и плотность импульса $\mathbf{j}_0$ параллельны друг другу:

$$\mathbf{j}_0 = j_0(T,\rho,w)\frac{\mathbf{w}}{w}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем равенство (3).

Далее, преобразовывая (1) и используя (2), мы можем записать dE в виде

$$dE = TdS + \\ + \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} - \mathbf{v}_s\mathbf{v}_n\right) d\rho + (\mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_n)d\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n d\mathbf{j}, \tag{4}$$

где $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_s + \mathbf{j}_0$ – полная плотность импульса, а $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_s + \mathbf{w}$ – нормальная скорость.

Устойчивость предполагает, что любая "разрешенная" флуктуация увеличивает полную энергию системы E_{tot}. При этом разрешенными являются флуктуации, которые оставляют неизменными сохраняющиеся величины. Это означает, что минимальность E_{tot} нужно исследовать при постоянных энтропии и всех аддитивных интегралах движения: массы, импульса и сверхтекучей скорости. В то время как сохранение массы и импульса общеизвестно, сохранение сверхтекучей скорости заслуживает отдельного комментария. Действительно, сверхтекучее движение потенциально, то есть скорость $\mathbf{v}_s$ является градиентом некоторого скаляра $\mathbf{v}_s = \nabla\phi$. Такое же соотношение можно записать для производной по времени $\dot{\mathbf{v}}_s = \nabla\dot{\phi}$. Последнее выражение, очевидно, является законом сохранения всех трех компонент вектора $\mathbf{V}_s = \int \mathbf{v}_s d\mathbf{r}$, являющегося, таким образом, добавочным аддитивным интегралом движения, специфическим для сверхтекучей жидкости.

Рассмотрим макроскопическую флуктуацию всех переменных δS, $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}_s$ и $\delta\mathbf{j}$. Сохранение этих величин обеспечивает тождественное равенство нулю первой вариации полной энергии однородной системы:

$$\delta E_{\text{tot}} = \int\left\{\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\rho,\mathbf{v}_s,\mathbf{j}}\delta S + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_{S,\mathbf{v}_s,\mathbf{j}}\delta\rho + \\ + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}_s}\right)_{S,\rho,\mathbf{j}}\delta\mathbf{v}_s + \left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{j}}\right)_{S,\rho,\mathbf{v}_s}\delta\mathbf{j}\right\}d\mathbf{r} \equiv 0.$$

Матрица 8×8 квадратичной формы второй вариации полной энергии – это Якобиан

$$\left\|\frac{\partial(T,\ \mathbf{v}_n,\ \ \mu + v_s^2/2 - \mathbf{v}_s\mathbf{v}_n,\ \ \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_n)}{\partial(S,\ \ \mathbf{j},\qquad\qquad \rho,\qquad\qquad \mathbf{v}_s\quad)}\right\|.$$

Он положительно определен, если все главные миноры $M_1, M_2, \ldots, M_8$ в левом верхнем углу положительны. Мы последовательно проверяем условия на эти миноры.

•Первое условие положительности

$$M_1 = \frac{\partial(T,\mathbf{j},\rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(S,\mathbf{j},\rho,\mathbf{v}_s)} = \\ = \frac{\partial(T,\ \mathbf{j},\ \rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(T,\mathbf{v}_n,\rho,\mathbf{v}_s)}\ \frac{\partial(T,\mathbf{v}_n,\rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(S,\ \mathbf{j},\ \rho,\mathbf{v}_s)} = \\ \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho,w}\left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} - \left(\frac{\partial j_0}{\partial T}\right)^2_{\rho,w}\right)^{-1} > 0$$

является обобщением обычного требования положительности теплоемкости. Ниже будет показано (см. (8)), что $(\partial j_0/\partial w)_{T,\rho} > 0$, таким образом последнее неравенство фактически имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho,w}\left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} - \left(\frac{\partial j_0}{\partial T}\right)^2_{\rho,w} > 0. \tag{5}$$

•Положительность следующей группы миноров легко проверить при помощи преобразования

$$Q' = \left\|\frac{\partial(T,\mathbf{v}_n,\rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(S,\ \mathbf{j},\ \rho,\mathbf{v}_s)}\right\| = \\ = \left\|\frac{\partial(T,\mathbf{j},\rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(S,\mathbf{j},\rho,\mathbf{v}_s)}\right\|\left\|\frac{\partial(T,\mathbf{v}_n,\rho,\mathbf{v}_s)}{\partial(T,\ \mathbf{j},\ \rho,\mathbf{v}_s)}\right\|. \tag{6}$$

Отсюда видно, что положительность миноров M_2, M_3, M_4 будет обеспечена в том случае, если положительны все миноры второго множителя в (6):

$$\left\|\left(\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial\mathbf{v}_n}\right)_{T,\rho,\mathbf{v}_s}\right\|^{-1} = \\ = \left\|\left(\frac{\partial\mathbf{j}_0}{\partial\mathbf{w}}\right)_{T,\rho}\right\|^{-1} = \begin{Vmatrix}(\partial j_0/\partial w)_{T,\rho} & 0 & 0\\ 0 & j_0/w & 0\\ 0 & 0 & j_0/w\end{Vmatrix}^{-1}.$$

Мы использовали тождество (3) и выбрали направление вектора $\mathbf{w}$ в качестве первой координаты. Таким образом, к нашему набору добавились следующие неравенства:

$$\mathbf{j}_0\mathbf{w} \geq 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} > 0. \qquad (8)$$

•Такое же преобразование, будучи примененным к самому большому минору, дает

$$Q = Q' \left\| \frac{\partial(T,\, \mathbf{v}_\mathrm{n},\, \mu + v_\mathrm{s}^2/2 - \mathbf{v}_\mathrm{s}\mathbf{v}_\mathrm{n},\, \mathbf{j} - \rho\mathbf{v}_\mathrm{n})}{\partial(T,\, \mathbf{v}_\mathrm{n},\, \rho,\, \mathbf{v}_\mathrm{s})} \right\| =$$

$$= Q'Q''.$$

Аналогично, положительность миноров M_5, M_6, M_7, M_8 обеспечивается положительностью нетривиальных главных миноров матрицы Q''. Используя термодинамическое тождество

$$d\mu = \frac{dp}{\rho} - \frac{S}{\rho}dT - \frac{\mathbf{j}_0}{\rho}d\mathbf{w},$$

получаем

$$\left(\frac{\partial\left(\mu + v_\mathrm{s}^2/2 - \mathbf{v}_\mathrm{s}\mathbf{v}_\mathrm{n}\right)}{\partial\rho}\right)_{T,\mathbf{v}_\mathrm{n},\mathbf{v}_\mathrm{s}} = $$
$$= \left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_{T,\mathbf{w}} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,w}.$$

Ниже приведено явное выражение для подматрицы, соответствующей подпространству $\rho, v_\mathrm{s}^x, v_\mathrm{s}^y, v_\mathrm{s}^z$, матрицы Q''. Как и ранее, мы направили ось x в направлении вектора $\mathbf{w}$. Используя (3), получаем

$$\left\| \begin{array}{cccc} (\partial p/\partial\rho)_{T,w}/\rho & (\partial j_0/\partial\rho)_{T,w} - w & 0 & 0 \\ (\partial j_0/\partial\rho)_{T,w} - w & \rho - (\partial j_0/\partial w)_{T,\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho - \dfrac{j_0}{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho - \dfrac{j_0}{w} \end{array} \right\|.$$

Соответствующие неравенства — это

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,w} > 0, \qquad (9)$$

которое является обобщенным (на случай ненулевой относительной скорости w) требованием положительности сжимаемости,

$$j_0 < w\rho \qquad \text{и} \qquad (10)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,w}\left(\rho - \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho}\right) - \rho\left(\left(\frac{\partial j_0}{\partial\rho}\right)_{T,w} - w\right)^2 > 0. \qquad (11)$$

Неравенства (5), (7)–(11) представляют полный набор условий термодинамической устойчивости.

3. Обсуждение. В ситуации с "остановленной нормальной компонентой" поток массы $\mathbf{f}$ относительно нормальной компоненты может оказаться более удобной переменной, чем поток относительно сверхтекучей $\mathbf{j}_0$. Очевидное соотношение между ними $f = \rho w - j_0$ приводит к следующей переформулировке полученных неравенств:

$$\mathbf{fw} < 0, \quad f < w\rho, \qquad (12)$$

$$0 < \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{\rho,T} < \rho, \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho,w}\left(\rho - \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{T,\rho}\right) > \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2_{\rho,w}, \qquad (14)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,w}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{\rho,T} > \rho\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2_{w,T}. \qquad (15)$$

В качестве простого примера использования выведенных неравенств рассмотрим их при $w = 0$. Из (12)–(15) имеем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho,w} > 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{T,w} > 0, \qquad (16)$$

$$\rho > \left(\frac{\partial j_0}{\partial w}\right)_{T,\rho} > 0. \qquad (17)$$

В обычных обозначениях последнее неравенство имеет ясный физический смысл:

$$\rho_\mathrm{s} > 0, \quad \rho_\mathrm{n} > 0. \qquad (18)$$

4. Фононно-ротонная модель. Рассмотрим полученные критерии устойчивости в применении к реальному сверхтекучему ^{4}He. Для вычисления производных, входящих в неравенства, необходима микроскопическая модель, роль которой с успехом может играть фононно-ротонная теория Ландау, применимая в широком диапазоне температур и скоростей. Мы будем ее использовать для вычисления вклада квазичастиц в "модифицированную" свободную энергию в системе покоя сверхтекучей компоненты:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 - \mathbf{wj}_0, \quad d\widetilde{\mathcal{F}}_0 = -SdT - \mathbf{j}_0 d\mathbf{w}.$$

Этот потенциал можно получить из спектра элементарных возбуждений, используя обычное выражение

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = T\int \ln\left(1 - \exp\left(\frac{\mathbf{pw} - \epsilon(p)}{T}\right)\right)\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Здесь энергия возбуждения $\epsilon(p)$ для двух ветвей задается выражениями

$$\epsilon_{\rm ph}(p) = cp, \quad \epsilon_{\rm r}(p) = \Delta + (p - p_0)^2/2m.$$

Индексы ph и r используются для обозначения величин, относящихся к фононам и ротонам, соответственно, c – это скорость звука, Δ – ширина ротонной щели, а m и p_0 – эффективная масса и импульс ротонов, соответственно (использованные численные данные можно найти в работах [4, 5]: $\rho = 0.145\,$г/см^3, $\Delta = 8.7\,$K, $m = 0.16 m_{\rm He}$, $p_0/\hbar\rho^{1/3} = 3.673 \cdot 10^8\,$г$^{-1/3}$, $c = 238\,$м/с, $\partial\Delta/\partial\rho = -0.47 \cdot 10^{-14}\,$см$^5\,$с$^{-2}$, $\partial m/\partial\rho = -0.45 \cdot 10^{-23}\,$см^3, $\partial c/\partial\rho = 467 \cdot 10^3\,$см$^4\,$с$^{-1}\,$г$^{-1}$). Малый безразмерный параметр $m\Delta/p_0^2 \sim 0.03 \ll 1$ обеспечивает, например тот факт, что критическая скорость Ландау определяется выражением $v_{\rm L} = \Delta/p_0$.

После интегрирования приведенные соотношения приводят к следующему вкладу в свободную энергию:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_0 = -\frac{T^4\pi^2}{90\hbar^3 c^3}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)^{-2} - $$

$$-\frac{T^{5/2} m^{1/2}}{2^{1/2}\pi^{3/2}\hbar^3}\frac{p_0}{w}\sinh\frac{wp_0}{T}\exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right).$$

Дифференцируя этот потенциал, можно получить все термодинамические величины. А именно,

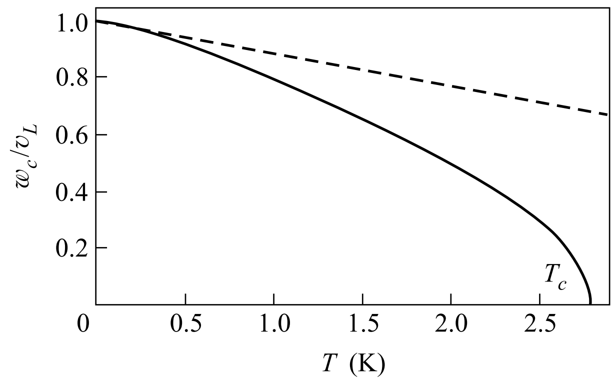
$$S = -\left(\partial\widetilde{\mathcal{F}}_0/\partial T\right)_{w,\rho}, \quad j_0 = -\left(\partial\widetilde{\mathcal{F}}_0/\partial w\right)_{T,\rho}.$$

Вкладом квазичастиц в производные от давления мы пренебрегаем.

Первым нарушается неравенство (11). Множество точек в плоскости T-w, удовлетворяющих этому неравенству, показано на рисунке. Жидкость теряет устойчивость над изображенной на рисунке сплошной кривой.

При нулевой температуре критическая скорость стремится к критической скорости Ландау $v_{\rm L}$. Отметим, что в системах, где все возбуждения допускают гидродинамическое описание (иными словами, системы без ротонной ветви), неравенство (11) при нулевой температуре подразумевает выполнение условия $(\partial p/\partial\rho)_{T,w} - w^2 > 0$, то есть $w < c$.

5. Заключение. Считается, что разрушение сверхтекучести в узких отверстиях имеет следующую природу [1]. Пока сечение не слишком мало, критическая скорость не зависит от температуры и увеличивается по мере сужения отверстия. Именно такое поведение характерно для фейнмановской критической скорости, связанной с рождением вихрей.



Критическая скорость $w_{\rm c}$ в зависимости от температуры T при нормальном давлении. Пунктирная линия соответствует равенству $T = \Delta - p_0 w$, видно, что условие $T < \Delta - p_0 w$ остается верным во всей области устойчивости. При нулевой температуре критическая скорость "неустойчивости" $w_{\rm c}$ совпадает с критической скоростью Ландау $v_{\rm L}$, а при критической температуре $T_{\rm c}$ (в λ-точке) обращается в нуль (см. (18)). В фононно-ротонной модели критическая температура $T_{\rm c} \approx 2.8\,$K

В достаточно узких отверстиях "вихревая" критическая скорость становится столь большой, что механизм разрушения сверхтекучести и его свойства меняются: критическая скорость больше не зависит от сечения отверстия, но уменьшается с ростом температуры. Такое поведение обычно связывают [1] с механизмом Иорданского–Лангера–Фишера [6]. Однако в связи с отсутствием надежной информации о профиле отверстий численному сравнению с экспериментом эта теория не подвергалась.

В то же время, экспериментально наблюдаемое поведение критической скорости можно ассоциировать с описанным критерием устойчивости. Другими словами, мы предлагаем альтернативное объяснение экспериментальных результатов, предполагая, что в узких отверстиях достигается термодинамический предел $w_{\rm c}$.

При сравнении наших предсказаний с экспериментальными данными нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Предположение, что критическая скорость определяется пределом устойчивости, подразумевает существенную нелинейность гидродинамических уравнений внутри канала. В частности, это означает, что сверхтекучую компоненту нельзя считать несжимаемой фракцией жидкости. Другими словами, разность фаз на концах канала не пропорциональна максимальной достигнутой скорости.

Необходимо отметить, что использованный нами подход к критической скорости как к пределу устойчивости схож с подходом, применявшимся в работе Кремера [7]. Хотя предлагаемые там неравенства не являются термодинамическими, численные значения критической скорости, полученные Кремером на основе фононно-ротонной модели, близки к изображенным на рисунке.

Мы благодарим И. А. Фомина за полезное обсуждение. Работа была поддержана грантами INTAS # 01-686, CRDF # RP1-2411-MO-02, Российским фондом фундаментальных исследований # 03-02-16401 и президентской программой поддержки ведущих научных школ.

1. E. Varoquaux, W. Zimmermann, and O. Avnel, in: *Excitations in Two-Dimensional and Three-Dimensional Quantum Fluids*, Eds. A. F. G. Wyatt and H. J. Lauter, NATO ASI Series, Plenum Press, New York–London, 1991, p. 343.
2. I. M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, W. A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1965.
3. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, part 1, Pergamon Press, Oxford, 1980.
4. R. J. Donnelly and P. H. Roberts, J. Low Temp. Phys. **27**, 687 (1977).
5. R. J. Donnelly, J. A. Donnelly, and R. N. Hills, J. Low Temp. Phys. **44**, 471 (1981).
6. J. S. Langer and J. D. Reppy, in: *Progress in Low Temperature Physics*, Vol. VI, Ed. C. J. Gorter, North-Holland, Amsterdam, 1970, ch.1.
7. L. Kramer, Phys. Rev., **179**, 149 (1969).