Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 2, стр. 79 – 83 *25 января 1985 г.*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ O (3)-НЕЛИНЕЙНОЙ σ-МОДЕЛИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

П.Б.Вигман

Построено точное решение двумерной O (3)-нелинейной σ-модели. В рамках метода Бете вычислены зависимость энергии основного состояния от внешнего поля, спектр и амплитуды рассеяния.

1. O (3)-нелинейная σ-модель (или $\bar{n}$-поле) описывает киральное поле на сфере S^2:

$$S = \frac{1}{2\lambda_0} \int d^2x \, (\partial_\mu \bar{n})^2 \, ; \quad \bar{n} \in S^2 , \tag{1}$$

где $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – единичный вектор $\bar{n}^2 = 1$. Это хорошо известная модель является, возможно, простейшим примером квантовой теории поля, в которой геометрические свойства многообразия приводят к сильному взаимодействию голдстоуновских частиц, оставляя их асимптотически свободными на малых расстояниях [1], и наделяют теорию нетривиальной топологией, в которой возможны инстантоны [2]. Вследствие роста взаимодействия низкоэнергетические свойства системы, в частности вопрос о спектре частиц, остается за пределами стандартных методов квантовой теории поля. С другой стороны известно, что $\bar{n}$-поле обладает бесконечной серией законов сохранения [3,4], свойством факторизации рассеяния и, следовательно, вполне интегрируема. Пользуясь одним лишь этим свойством и гипотезой о том, что *элементарные частицы массивны, принадлежат изовекторному* $O(3)$*-мультиплету и не образуют связанных состояний* в рамках факторизованного бутстрапа была определена S-матрица [5].

Ниже представлено полное решение модели, полученное методом Bethe – Ansatz и, в частности, доказана гипотеза, положенная в основу факторизованного бутстрапа. Для физических приложений изучается поведение σ-модели во внешнем однородном поле:

$$\mathcal{E}(h) = -\ln \int D\bar{n}(x) \exp\{-S\{n(x)\} - \bar{h}_\mu \int d^2x \bar{J}_\mu\}, \tag{2}$$

где $h^2 = \bar{h}_\mu \bar{h}_\mu$, а $\bar{J}_\mu = \bar{n} \times \partial_\mu \bar{n}$ – нетеровский ток. Показано, что энергия основного состояния

$$\mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(0) + m \int_{-F}^{F} \operatorname{ch}\theta\, \epsilon(\theta) d\theta, \tag{3}$$

где $\epsilon(\theta)$ удовлетворяет уравнению:

$$\epsilon(\theta) - \int_{-F}^{F} \frac{\epsilon(\theta')}{\pi^2 + (\theta - \theta')^2} d\theta' = h - m \operatorname{ch}\theta\ ; \quad \epsilon(\pm F) = 0. \tag{4}$$

2. Метод решения основан на идее высказанной Поляковым несколько лет тому назад [6]. Рассмотрим $SU(2)$-главное киральное поле с нарушенной правой симметрией:

$$S = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2\lambda_0} \left[(A_\mu^x)^2 + (A_\mu^y)^2 \right] + \frac{1}{2\lambda_z} (A_\mu^z)^2 \right\}; \tag{5}$$

$$A_\mu(x) = g^{-1}(x) \partial_\mu g(x) \equiv \bar{A}_\mu \bar{\sigma}\ ; \quad g \in SU(2).$$

Физически очевидно, что если момент инерции $1/\lambda_z$ вокруг оси z равен нулю, ротатор становится вектором на сфере $S^2 = SU(2)/U(1)$: $\bar{n} \to \hat{n} \equiv \bar{n}\bar{\sigma} = g\sigma^z g^{-1}$ и действия (1) и (5) совпадают. Действие (5) при $\lambda_z = \infty$ обладает $U(1)$-калибровочной инвариантностью относительно вращений ротаторов вокруг оси z: $g \to g \exp\left(\frac{i}{2} \phi(x) \sigma^z\right)$ что означает, что поле $\bar{n}(x)$ определено на классах смежности $SU(2)$ по подгруппе $U(1)$.

Недавно было найдено решение изотропного ($\lambda_z = \lambda_0$) кирального поля [7]. Метод использованный в этой работе немедленно обобщается на анизотропный случай. Он основан на эквивалентности кирального поля (5) и интегрируемой модели (1 + 1) взаимодействующих фермионов: пусть $\psi \equiv \psi_f^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$; $f = 1 \dots N_f$) – фермионное поле, образующее $SU(2)$ – "цветной" и вспомогательный $U(N_f)$ – "флэйворный" мультиплеты, и $j_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu \sigma^a \psi$. Тогда в пределе $N_f \to \infty$ модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu \gamma_\mu \psi + \sum_{a = x, y, z} \lambda_a j_\mu^a j_\mu^a \tag{6}$$

эквивалентна (5) при $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_0$.

Фермионная модель (6) решена методом Бете при конечных λ_z, N_f и лишь затем найдены пределы $N_f \to \infty$, $\lambda_z \to \infty$. Первый предел в известном смысле регулярен и обсуждался в [7]. Основным, и весьма деликатным, моментом решения является предел $\lambda_z \to \infty$. Дело в том, что при $\lambda_z = \infty$ мы имеем дело с теорией с нулевым током: $j^z(x) = 0$. Это калибровочно-инвариантная теория. Мы покажем, что при конечном λ_z т. е.,когда калибровочная инвариантность нарушена, фундаментальные частицы суть $SU(2)$-дублеты. Однако, при $\lambda_z = \infty$ они преобразуются при калибровочном преобразовании. Это означает, что между частицами действует растущий с расстоянием U (1)-кулоновский потенциал, который приводит к швингеровскому механизму конфаймента: масса $SU(2)$- дублетов становится бесконечной при $\lambda_z \to \infty$ и они исчезают из физического спектра, однако их связанные состояния, суть $O(3)$-триплеты, обладают конечной массой и оказываются элементарными частицами $\bar{n}$-поля.

3. Опуская подробности решения фермионной модели (6) приведем уравнения Бете: собственное состояние $2\mathcal{N}$-частиц, являющееся флэйворным синглетом, описывается быстротами $\{k_1^\pm \dots k_{\mathcal{N}}^\pm\}$ и $\{\Lambda_1 \dots \Lambda_M\}$ удовлетворяющими уравнениям:

$$\exp(ik_j^\pm L) = \prod_{\alpha=1}^{M} e_{N_f}(\Lambda_\alpha \mp f\,|\,\mu); \tag{7а}$$

$$\prod_{(\pm)} \left[e_{N_f}(\Lambda_\alpha \pm f\,|\,\mu)\right]^{\mathcal{N}} = -\prod_{\beta=1}^{M} e_2(\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta\,|\,\mu), \tag{7б}$$

где $e_n(x\,|\,\mu) = \operatorname{sh}\mu(in/2 + x)/\operatorname{sh}\mu(-in/2 + x)$; $M = \mathcal{N}N_f - S^z$; а S^z – $SU(2)$-изоспин. Параметр $\mu \in [0, \pi/N_f]$ и f – неуниверсальные функции λ_0 и λ_z. Нам понадобятся их следующие свойства: $\mu f(\lambda_z, \lambda_0)$ – монотонная функция $\lambda_z - \lambda_0$ при $\lambda_z = \lambda_0$, $\mu \to 0$; $\mu f \to$ $\to 1/\lambda_0$ (при этом уравнения (7) совпадают с уравнениями изотропного кирального поля [7]), при $\lambda_z \to \infty$, $\mu \to \pi/N_f$.

4. Основное состояние системы формируется спиновыми комплексами ("струнами") порядка N_f: $\Lambda^{(k)} = \Lambda + ik$; $(k = -(N_f - 1) - (N_f - 1))$. Пусть θ_α $(\alpha = 1 \dots m)$ – быстроты дырок в море N_f-струн, а ρ_ν и λ_κ – быстроты параметризующие струны большего и меньшего порядка чем N_f. Эти быстроты описываются так называемыми физическими уравнениями Бете, которые мы приводим здесь без вывода.

$$\exp(iM\operatorname{sh}\theta_\alpha L) = \prod_{\beta=1}^{m} S\left(\theta_\alpha - \theta_\beta\,|\,\frac{\gamma}{8\pi}\right) S(\theta_\alpha - \theta_\beta\,|\,N_f) \prod_\nu e_1\left(\rho_\nu - \theta_\alpha\,|\,\frac{8\pi}{\gamma}\right) \prod_\kappa e_1\left(\lambda_\kappa - \theta_\alpha\,|\,\frac{1}{N_f}\right), \tag{8а}$$

$$\prod_{\alpha=1}^{m} e_1\left(\rho_\nu - \theta_\alpha\,|\,\frac{8\pi}{\gamma}\right) = -\prod_{\nu'} e_2\left(\rho_\nu - \rho_{\nu'}\,|\,\frac{8\pi}{\gamma}\right); \tag{8б}$$

$$\prod_{\alpha=1}^{m} e_1\left(\lambda_\kappa - \theta_\alpha\,|\,\frac{1}{N_f}\right) = -\prod_{\kappa'} e_2\left(\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa'}\,|\,\frac{1}{N_f}\right); \tag{8в}$$

здесь $\gamma = \left(\frac{\pi}{\mu} - N_f\right) 8\pi$, $M \propto \mathcal{N}/L \exp(-\pi f/2\mu)$ – масса фундаментальных частиц

$$S(\theta\,|\,\gamma) = \exp\left\{ i\int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi}\, \frac{\sin\frac{2}{\pi}\omega\theta}{\omega}\, \frac{\operatorname{sh}\omega(\gamma/8\pi - 1)}{2\operatorname{ch}\omega\,\operatorname{sh}\omega\,\gamma/8\pi} \right\}. \tag{9}$$

Факторизация физических уравнений Бете на две части зависящие только от γ и ρ и от N_f и λ означают, что S-матрица физических частиц $\hat{S}$ является тензорным произведением двух факторизованных S-матриц, действительно, из уравнения (8) следует, что

$$\hat{S}\left(\theta\,|\,\frac{\gamma}{8\pi}\right) = \lim_{N_f \to \infty} \hat{S}\left(\theta\,|\,\frac{\gamma}{8\pi}\, N_f\right) = \lim_{N_f \to \infty} \hat{S}^{U(1)}\left(\theta\,|\,\frac{\gamma}{8\pi}\right) \otimes \hat{S}^{U(1)}(\theta\,|\,N_f) =$$

$$= \hat{S}^{U(1)}\left(\theta \,\middle|\, \frac{\gamma}{8\pi}\right) \otimes \hat{S}^{SU(2)}(\theta), \tag{10}$$

где $\hat{S}^{U(1)}(\theta \mid \gamma)$ и $\hat{S}^{SU(2)}(\theta)$ — минимальные факторизованные, кроссинг-инвариантные S-матрицы, обладающие соответственно $U(1)$- и $SU(2)$-инвариантностью. Их явный вид приведен в [8, 9] (см. также обзор [10]). Этот результат имеет простой физический смысл, отражающий глобальную $U(1)_{Right} \otimes SU(2)_{Left}$ симметрию модели (5).

5. Обратимся теперь к пределу $\lambda_z \to \infty$, т. е. $\gamma \to 0$. Свойства $\hat{S}^{U(1)}(\theta \mid \gamma)$ и $\hat{S}^{SU(2)}(\theta)$ хорошо известны: $S^{SU(2)}(\theta)$ не имеет сингулярностей на физическом листе; $\hat{S}^{U(1)}(\theta \mid \gamma)$ является S-матрицей модели синус-Гордон [8]; при $\gamma < 8\pi$ она имеет полюса $\theta = i\pi - ik\gamma/8$, что приводит к спектру связанных состояний с массами: $m_k = 2M \sin k\gamma/16 \left(k = 1 \ldots < \frac{8\pi}{\gamma}\right)$. В пределе $\gamma \to 0$ масса $SU(2)$-дублетов M становится бесконечной: $M \propto \gamma^{-1}$. Напротив массы связанных состояний остаются конечными: $m \equiv m_1 \propto M\gamma$, причем высшие связанные состояния распадаются на "элементарные" $(k = 1)$: $m_k \to km_1$. Элементарная частица (низшее связанное состояние) является $SU(2) \otimes SU(2)$ приводимым тензором — смешанным состоянием $O(3)$-триплета $(\bar{\pi})$ и синглета (η). Амплитуды рассеяния этих частиц можно получить известной процедурой "склеивания" [11, 12 1)]. Можно показать, что при $\gamma \to 0$ триплетные состояния отщепляются от синглетных: $\langle \eta\eta \mid \bar{\pi}\bar{\pi} \rangle \propto \gamma \to 0$; $\langle \eta\bar{\pi} \mid \eta\bar{\pi} \rangle \propto \gamma^{1/2} \to 0$, а S-матрицы $S_{\bar{\pi}\bar{\pi}} \equiv \langle \pi^i\pi^k \mid \pi^j\pi^l \rangle$ и $\langle \eta\eta \mid \eta\eta \rangle$ становятся унитарными. При этом $S_{\bar{\pi}\bar{\pi}}$ оказывается $O(3)$ — S-матрицей, найденной в [5] (отщепившееся подпространство синглетных частиц является артифактом связанным с орбитой калибровочной группы).

6. Описанное явление следующим образом проявляется в рамках метода Бете. Рассмотрим для простоты случай, когда $8\pi/\gamma$ = целое число. Тогда быстроты ρ_ν и второй фактор в уравнении (8а) исчезают. Фактор $S(\theta \mid \gamma/8\pi)$ имеет полюс на физическом листе. Это означает, что уравнение (8) имеют комплексные решения: $\theta = \Theta^{(\nu)} \pm i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{16}k\right)$; $k = 1 \ldots \nu$, описывающие связанные состояния. Из уравнений (8) находим уравнения на быстроты $\Theta^{(\nu)}$. Для элементарных частиц, например, имеем $(\Theta^{(1)} \equiv \Theta)$

$$\exp(im \operatorname{sh}\Theta L) = \prod_{\theta} S^{(1)}(\Theta - \theta) \prod_{\Theta^{(\nu)}} S^{(1,\nu)}(\Theta - \Theta^{(\nu)}) \prod_{\lambda} \frac{\left(i\pi - \frac{i\gamma}{16} - \Theta + \lambda\right)\left(+\frac{i\gamma}{16} - \Theta + \lambda\right)}{\left(-i\pi + \frac{i\gamma}{16} - \Theta + \lambda\right)\left(-\frac{i\gamma}{16} - \Theta + \lambda\right)}; \tag{11}$$

$$\prod_{\theta} \frac{\frac{i\pi}{2} + \lambda - \theta}{\frac{-i\pi}{2} + \lambda - \theta} \prod_{\Theta^{(\nu)}} \prod_{k=1}^{\nu} \prod_{(\pm)} \frac{\frac{i\pi}{2} \mp i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{16}k\right) - \Theta^{(\nu)} + \lambda}{\frac{-i\pi}{2} \mp i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{16}k\right) - \Theta^{(\nu)} + \lambda} = -\prod_{\lambda'} \frac{i\pi + \lambda - \lambda'}{-i\pi + \lambda - \lambda'}; \tag{12}$$

где

$$S^{(1)}(\theta) = \tilde{S}\left(\theta + \frac{i\gamma}{16} - \frac{i\pi}{2}\right)\tilde{S}\left(\theta - \frac{i\gamma}{16} + \frac{i\pi}{2}\right),$$

$$S^{(m,k)}(\theta) = \tilde{S}\left(\theta - \frac{i\gamma}{16}(m-k)\right)\tilde{S}\left(\theta + \frac{i\gamma}{16}(m-k)\right)\tilde{S}\left(\theta - \frac{i\gamma}{16}(m+k) + i\pi\right)\tilde{S}\left(\theta + \frac{i\gamma}{16}(m+k) - i\pi\right),$$

$$\tilde{S}(\theta) = S(\theta \mid \gamma/8\pi)\, S(\theta \mid \infty). \tag{13}$$

---

1) Отметим, что в работах [11, 12] впервые обсуждалась возможность интерпретации $O(3)$ изовекторной частицы с факторизованной теорией рассеяния как связанного состояния $SU(2)$-дублетов с бесконечной массой.

амплитуды рассеяния элементарных частиц на солитонах и других связанных состояниях. При $\gamma = 0$ физические состояния состоят только из элементарных частиц, быстроты которых, согласно (11), (13), удовлетворяют следующим уравнениям Бете

$$\exp(im \operatorname{sh}\Theta_\alpha L) = \prod_{\beta=1}^{p} \frac{\Theta_\alpha - \Theta_\beta - i\pi}{\Theta_\alpha - \Theta_\beta + i\pi} \prod_{\kappa=1}^{q} \frac{\Theta_\alpha - \lambda_\kappa + i\pi}{\Theta_\alpha - \lambda_\kappa - i\pi} \; ; \quad (\alpha = 1 \dots p) \tag{14}$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p} \frac{\Theta_\alpha - \lambda_\kappa + i\pi}{\Theta_\alpha - \lambda_\kappa - i\pi} = - \prod_{\kappa' = 1}^{q} \frac{\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa'} + i\pi}{\lambda_\kappa - \lambda_{\kappa'} - i\pi} \; ; \quad (\kappa = 1 \dots q)$$

которые решают $O(3)$ нелинейную σ-модель.

7. Уравнения (14) можно представить как задачу на собственные значения:

$$\exp(imL \operatorname{sh}\Theta_\alpha) = \prod_{\beta=\alpha+1}^{p} \hat{S}_{\bar{\pi}_\alpha \bar{\pi}_\beta}(\Theta_\alpha - \Theta_\beta) \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} \hat{S}_{\bar{\pi}_\alpha \bar{\pi}_\beta}(\Theta_\alpha - \Theta_\beta), \tag{15}$$

где

$$(S_{\bar{\pi}\;\bar{\pi}}(\Theta))^{ij}_{kl} = (2i\pi\Theta\delta_{ij}\delta_{kl} + \Theta\delta_{ik}\delta_{jl} + 2\pi i\delta_{il}\delta_{jk}) \frac{1}{(\Theta + i\pi)(\Theta - 2\pi i)} \cdot \tag{16}$$

Оператор в правой части (15) в другом контексте был диагонализован в работе [13] и приводит к уравнениям (14). Согласно общим свойствам факторизованной теории рассеяния $\hat{S}(\theta)$ является S-матрицей физических частиц. Она описывает минимальную факторизованную теорию рассеяния $O(3)$-изовекторной частицы [5].

8. Величины p и q в уравнениях (14) описывают квадрат и проекцию нетеровского тока $\vec{J}_0 = \int dx\, \vec{n} \times \partial_0 \vec{n}$; $\vec{J}_0^2 = p(p+1)$; $J_0^z = p - 1$. Пользуясь стандартной техникой (см., например, [14]) находим отсюда, что энергия в однородном поле h дается формулами (3), (4).

9. Автор глубоко благодарен А.М.Полякову, оказывавшему стимулирующее влияние на всех этапах работы. Автор признателен также Л.Д.Фаддееву и Л.А.Тахтаджану за полезные обсуждения, и, в особенности, Н.Ю.Решетихину, который указал автору на работы [11, 12], и в беседе с которым летом 1983 г. возникла идея факторизованного бутстрапа.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1975, **59B**, 87.
2. *Белавин А.А., Поляков А.М.* ЖЭТФ, 1975, **47**, 17.
3. *Luscher M.* Nucl. Phys., 1978, **B135**, 1.
4. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1979, **82B**, 247.
5. *Замолодчиков Ал.Б., Замолодчиков А.Б.* Письма в ЖЭТФ, 1977, **26**, 608.
6. *Polyakov A.M.* Proc. XIV winter school of theoretical physics (Karpachz, 1977) Acta Univ. Wratislaviensis, 1978, **436**, 53.
7. *Polyakov A.M., Wiegmann P.B.* Phys. Lett., 1983, **131B**, 121.
8. *Zamolodchikov Al.B. Zamolodchikov A.B.* Ann. Phys., 1979, **120**, 253.
9. *Berg B., Karowski M., Weisz P., Kurak V.* Nucl. Phys.,1979, **B134**, 125.
10. *Kulish P.P., Sklyanin E.K.* Phys. Lett., 1979, **A70**, 461.
11. *Karowski M.* Nucl. Phys., 1979, **B153**, 244.
12. *Karowski M., Kurak V., Schroer B.* Phys. Lett., 1979, **B81**, 200.
13. *Lulish P.P., Sklyanin E.K.* Phys. Lett., 1981, **84A**, 349.
14 *Japaridze G.I., Nersesyan A.A., Wiegmann P.B.* Nucl. Phys. 1984, **B230** (FS10), 511.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 декабря 1984 г.