Письма в ЖЭТФ, том 9, стр. 639 – 642 *5 июня 1969 г.*

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ В ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ

М.А.Федоров

Когда температура сверхпроводника приближается к критической, то даже при слабых переменных внешних полях начинают играть роль нелинейные эффекты, ибо критическое поле сверхпроводника стремится к нулю. Используя методику вычислений, развитую в [1], нами было изучено несколько таких нелинейных эффектов: генерация на частоте $3\omega_0$, генерация комбинационных частот и вычислен поверхностный импеданс сверхпроводника в сильном переменном электромагнитном поле.

Предполагалось, что сверхпроводник является чистым в отношении своих равновесных свойств $\ell \gg \xi_0$, но содержит небольшое количество примесей, так что скин-эффект является нормальным $\delta_s \gg \ell$ (ℓ – длина свободного пробоя, δ_s – глубина проникновения поля, ξ_0 – параметр корреляции). В области температур $1 - T/T_c \ll \kappa^2$ это позволяет написать для тока выражение (τ – время пробега):

$$\mathrm{j}(q\omega) = -\frac{c}{4\pi}K(\omega)\mathrm{A}(q\omega) = -\frac{Ne^2}{mc}\left[\frac{7\zeta(3)}{4}\left(\frac{\Delta}{\pi T}\right)^2 - i\omega\tau\right]\mathrm{A}(q\omega). \qquad (1)$$

Для того, чтобы вопрос представлял экспериментальный интерес, величина области $1 - T/T_c \ll \kappa^2$ предполагается достаточно большой ($\kappa \sim 1$). Как известно [2], поведёния сверхпроводника в переменном поле зависит от соотношения между частотой внешнего поля ω_0 и частотами Ω_1 и Ω_0, характеризующими динамическое поведение электромагнитного поля и параметра $\Delta(r, t)$. В нашем случае, используя (1) и формулы работы [3], можно показать, что

$$\Omega_1 \sim \frac{1}{rT_c}\frac{\Delta^2}{T_c}, \quad \Omega_o \sim \frac{\Delta^2}{T_c}, \quad \Omega_1 << \Omega_o. \qquad (2)$$

Используя результаты работы [1], можно также показать, что при частотах внешнего поля $\omega_o << \Omega_o$ щель реагирует на мгновенное значение поля и при температурах $1 - T/T_c << \kappa^2$ удовлетворяет статическому уравнению Гинзбурга – Ландау, в котором, однако, поле зависит от времени как от параметра. При частотах $\omega_o >> \Omega_o$ для переменной части $\Delta(r, t)$ можно использовать уравнение, полученное в работе [4]. Эти уравнения совместно с уравнением Максвелла образуют замкнутую нелинейную систему уравнений, решение которой проводилось по теории возмущений с малым параметром H_o/H_c, H_o – амплитуда внешнего поля, $H_c(T)$ – критическое поле.

1. **Генерация третьей гармоники.** Если на сверхпроводник падает электромагнитная волна частоты ω_o, то присутствие гармоники $2\omega_o$ в колебаниях щели вызывает ток частоты $3\omega_o$, что приводит к излучению соответствующей гармоники поля. Для случая полупространства вычислялся коэффициент преобразования по мощности $\eta(3\omega_o) = |a(3\omega_o)|^2 = |E_{отр}(3\omega_o)/E_{пад}(\omega_o)|^2$. Для $a(3\omega_o)$ получено выражение:

$$a(3\omega_o) = i\,\frac{3\omega_o}{c}\left(\frac{H_o}{H_c}\right)^2 \frac{\kappa^2}{\delta_л^4}\,\frac{\gamma(3\omega_o) + \gamma(\omega_o)}{\gamma(3\omega_o)\gamma^2(\omega_o)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq/2\pi}{[q^2+\beta^2][q^2 + (\gamma(3\omega_o)+\gamma(\omega_o))^2][q^2 + (2\gamma(\omega_o))^2]} \qquad (3).$$

Здесь

$$\gamma = \sqrt{K(\omega)} \quad \mathrm{Re}\gamma > 0 \quad \delta_л = \delta_o(1 - T/T_c)^{-1/2} = 1{,}04\kappa\xi_o(1 - T/T_c)^{-1/2}$$

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\kappa}}{\delta_л} & \omega_o << \Omega_o \\ \sqrt{\dfrac{\omega_o r_o}{2}}\,(1 - i) & \Omega_o << \omega_o \end{cases} \qquad r_o = \frac{\pi\kappa^2}{48_o^2 T_c}.$$

Интеграл (3) элементарно вычисляется, но мы не приводим результат из-за его громоздкости. Ограничимся предельными случаями (H_{co} – критическое поле при $T = 0$)

1) $\omega_0 << \Omega_1, \quad \gamma(3\omega_0) = \gamma(\omega_0) = \delta_Л^{-1}$:

$$\eta_1 = 9{,}8\cdot 10^{-4}\left(\frac{\omega_0}{c}\delta_0\right)^2\left[\kappa\frac{\kappa+2\sqrt{2}}{(\kappa+\sqrt{2})^2}\right]^2\left(\frac{H_0}{H_{c0}}\right)^4\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^{-5}. \quad (4)$$

Величина η_1 очевидным образом связана с обычными формулами для поправки к глубине проникновения статического поля [5].

2) $\Omega_1 << \omega_0 << \Omega_0, \quad \gamma(\omega_0) = (1-i)\delta_s^{-1} = (1-i)\frac{1}{c}\sqrt{2\pi\omega_0\sigma}$:

$$\eta_2 = 5{,}5\cdot 10^{-6}\left(\frac{\omega_0}{c}\delta_0\right)^2\kappa^2\left(\frac{H_0}{H_{c0}}\right)^4\left(\frac{\delta_s}{\delta_0}\right)^{12}(1-T/T_c). \quad (5)$$

3) $\Omega_0 << \omega_0$:

$$\eta_3 = 1{,}1\cdot 10^{-5}\frac{\omega_0}{c^2 r_0}\kappa^4\left(\frac{H_0}{H_{c0}}\right)^4\left(\frac{\delta_s}{\delta_0}\right)^{12}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)^2. \quad (6)$$

Из формул (4) – (6) видно, что η как функция температуры имеет резкий максимум при условии $\omega_{0\,max} \sim \Delta^2/rT_c^2 = (1/r)8\pi^2/7\xi(3)\times$ $\times(1-T/T_c)$. При этих частотах меняется характер проникновения поля в сверхпроводник. При частотах $\omega_0 >> \omega_{0\,max}$ поле проникает в металл на глубину $\delta_s << \delta_Л$. Поскольку Ω_1 и Ω_0 зависят от температуры видно, что взяв достаточно низкую частоту внешнего поля (при $1-T/T_c \sim 10^{-2}$, $\ell = vr \sim 10^{-3}$ *см*, $\omega_{0\,max} \sim 10^8 + 10^9$ *гц*) изменяя температуру можно осуществить любую из указанных трех ситуаций.

В области частот $\Omega_1 << \omega_0 << \Omega_0$ можно, используя метод "сшивки" [6], вычислить η для большой амплитуды поля. В этой области частот поле в первом приближении определяется скин-эффектом и сверхпроводимость не разрушается даже в сильных полях. Спектр отраженного сигнала содержит все частоты $\omega_0(2k+1)$ $k = 0, \pm1, \pm2\,\ldots$. При условии $\kappa(H_0/H_c)^2(\delta_s/\delta_Л)^3 >> 1$ имеем:

$$\eta = 2{,}9\cdot 10^4\left(\frac{\omega_0}{c}\delta_0\right)^2\frac{1}{\kappa^4}\left(\frac{H_{c0}}{H_0}\right)^8\left(\frac{\delta_0}{\delta_s}\right)^6(1-T/T_c)^4 B(\kappa),$$

$$B(1) = 1, \qquad B(\kappa) \to \frac{1{,}5\kappa^2}{(\sqrt{2}+1)^{2k}} \quad \text{при } \kappa \to \infty. \quad (7)$$

Переход энергии падающей волны в энергию высоких гармоник приведет к существенному изменению характера отражения на основной частоте ω_0. Приведем результат для поверхностного импеданса в сильном поле:

$$\xi = (1 - i)\frac{\omega_0 \delta_s}{2c}\left[1 + i\,\frac{65}{\kappa^2}\left(\frac{H_{c0}}{H_0}\right)^4\left(\frac{\delta_0}{\delta_s}\right)^4\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^2\right] \qquad (8)$$

2. **Комбинационные частоты.** При падении на сверхпроводник двух электромагнитных волн с близкими частотами ω_1 и ω_2 возникает отражение на комбинационных частотах, в частности, на частоте $2\omega_1 - \omega_2$. Аналогично предыдущему вычислялся коэффициент преобразования $\eta(2\omega_1 - \omega_2)$, который тоже имеет резкий максимум по температуре при условии $\omega_1 \omega_2 \sim \Omega_1$. Приведет результаты в наиболее интересном случае, когда $\omega_1 - \omega_2 << \Omega_1$

1) $\omega_1,\ \omega_2 >> \Omega_1$:

$$\eta_1 = 4{,}4\cdot 10^{-4}\left(\frac{\omega_1}{c}\delta_0\right)^2\left[\kappa\,\frac{\kappa + 2\sqrt{2}}{(\kappa + \sqrt{2})^2}\right]^2\left(\frac{H_1 H_2}{H_{c0}}\right)^4 (1 - T/T_c)^5; \qquad (9)$$

2) $\omega_1,\ \omega_2 >> \Omega_1$:

$$\eta_2 = 1{,}4\cdot 10^{-5}\left(\frac{\omega_1}{c}\delta_0\right)^2 \kappa^2\left(\frac{H_1 H_2}{H_{c0}}\right)^4\left(\frac{\delta_s}{\delta_0}\right)^{12} (1 - T/T_c). \qquad (10).$$

В заключение заметим, что эксперименты, в которых наблюдались подобные явления, выполнены к сожалению только на пленках [7].

Автор выражает благодарность Л.П.Горькову и Г.М.Элиашбергу за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 апреля 1969 г.

Литература

[1] Л.П.Горьков, Г.М.Элиашберг. ЖЭТФ, 54, 612, 1968.
[2] Л.П.Горьков, Г.М.Элиашберг. Письма в ЖЭТФ, 8, 329, 1968.
[3] М.П.Кемоклидзе. ЖЭТФ, 53, 1362, 1967.
[4] E. Abrahams, T. Tsuneto. Phys. Rev., 152, 416, 1966.
[5] В.Л.Гинзбург, Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 20, 1064, 1950.
[6] Л.П.Горьков, Г.М.Элиашберг, ЖЭТФ, 55, 2430, 1968.
[7] K. Rose, M. D. Sherill. Phys. Rev., 145, 179, 1966.