Письма в ЖЭТФ, том 11, стр. 200 – 203 *5 февраля 1970 г.*

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ПРИБЛИЖЕНИЯ К ОСОБОЙ ТОЧКЕ В ОТКРЫТОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников

В предыдущих сообщениях [1, 2] было показано, что в общем космологическом решении уравнений Эйнштейна существуют особенность, причем она имеет сложный колебательный характер. Был рассмотрен также частный пример однородной замкнутой модели (мир с однородным пространством типа IX по Бианки), допускающий более полное аналитическое рассмотрение [2] (эта модель рассматривалась также Мизнером [3]). В настоящей работе мы хотим сообщить еще об одном аналогичном примере, который не только снова подтверждает качественный анализ общего случая, но и проливает дополнительный свет на некоторые аспекты проблемы. Это – модель с однородным пространством типа VIII по Бианки.

Пусть снова $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – реперные векторы, определяющие координатную зависимость пространственной метрики; $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – функции синхронного мирового времени t, определяющие масштабы пространственных расстояний в направлениях соответственно $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Однородным пространством типов VIII и IX отвечают постоянные (независящие от координат) значения величин

$$\lambda = \frac{1}{v}(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}), \quad \mu = \frac{1}{v}(\mathbf{m}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{m}), \quad \nu = \frac{1}{v}(\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}),$$

где $v = (\mathbf{l}[\mathbf{mn}])$ (при равных нулю произведениях $\mathbf{m}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}$, $\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}$ и т.п.). В случае одинаковых по знаку значениях этих постоянных мы имеем пространство типа IX, а если знак одной из них обратен знаку двух других – пространство типа VIII. В первом случае можно положить $\lambda = \mu = \nu = 1$, а во втором пусть будет $\lambda = -1$, $\mu = \nu = 1$.

Функции a, b, c подчиняются уравнениям Эйнштейна

$$\alpha_{\tau\tau} = (\mu b^2 - \nu c^2)^2 - \lambda^2 a^4, \quad \beta_{\tau\tau} = (\lambda a^2 - \nu c^2) - \mu^2 b^4, \qquad (1)$$

$$\gamma_{\tau\tau} = (\lambda a^2 - \mu b^2)^2 - \nu^2 c^4,$$

$$\alpha_\tau \beta_\tau + \alpha_\tau \gamma_\tau + \beta_\tau \gamma_\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)_{\tau\tau}, \qquad (2)$$

где $a = e^{\alpha}$, $b = e^{\beta}$, $c = e^{\gamma}$, а переменная τ связана с t согласно $d\tau = dt/abc$ (см. [2]§4). Характер смены казнеровских режимов в коротких эрах (по терминологии, введенной в [1]) заведомо не зависит от знаков λ, μ, ν, так как определяется каждый раз всего одним членом в правых сторонах (1),содержащим λ^2, μ^2 или ν^2. Надо поэтому рассмотреть лишь решения, описывающие "длинные эры", в течении которых две из функций a, b, c испытывают многократные осцилляции, а третья монотонно убывает (при $t \to 0$) и ею можно пренебречь по сравнению с первыми двумя. Если монотонно убывающей является функция a, то после пренебрежения ею уравнения приобретают тот же вид, что и в аналогичном случае для пространства типа IX; соответственно временная эволюция метрики в течении длинной эры в обоих моделях будет описываться одинаковыми формулами.

Если же монотонно убывает функция b или c (пусть это будет c), то после пренебрежения ею из (1), (2) получаются уравнения (ср. [2]):

$$q_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} q_{\xi} + \operatorname{sh} q = 0, \qquad (\alpha + \beta)_{\xi\xi} = 0, \tag{3}$$

$$\gamma_{\xi} = -\frac{1}{2\xi} + \frac{\zeta}{8}(q_{\xi}^2 + 2\operatorname{ch} q + 2), \tag{4}$$

где $q = \alpha - \beta$, а ξ – переменная, связанная с переменной τ согласно

$$\xi = \xi_0 \exp \left\{ \frac{2a_0^2}{\xi_0}(\tau - \tau_0) \right\};$$

в течении длинной эры эта переменная пробегает значения начиная от некоторого начального очень большого значения $\xi \sim \xi_0$ до $\xi \sim 1$. Уравнения (3) совпадают с таковыми для модели типа IX, а (4) отличается знаком перед последней двойкой в скобках. В результате для функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$ получаются прежние выражения, имеющие вид (в первом приближении по $1/\xi$)

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = a_0 \sqrt{\frac{\xi}{\xi_0}} \left[1 \pm \frac{A}{\sqrt{\xi}} \sin(\xi - \xi_0) \right] \tag{5}$$

(A – постоянная), а для $c(\xi)$ и $t(\xi)$:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{t}{t_0} = \exp\left\{ -\frac{1}{8}(\xi_0^2 - \xi^2) \right\} \qquad (6)$$

вместо прежнего

$$\frac{c}{c_0} = \frac{t}{t_0} = \exp\left\{ -A^2(\xi_0 - \xi) \right\}. \qquad (6a)$$

Таким образом, отличие в характере длинных эр в обоих случаях сводится лишь к другой связи между временем t и переменной ξ, по которой происходят осцилляции функций (5). Если t_0 и t_1 верхняя и нижняя границы длинной эры по времени, то в случае (6) $8\ln(t_0/t_1) \approx \xi_0^2$, а в случае (6а): $A^{-2}\ln(t_0/t_1) \approx \xi_0$. С другой стороны, значение ξ_0 определяет полное число осцилляций в течении длинной эры (равное $\xi_0/2\pi$). Отсюда видно, что при заданном отношении t_0/t_1 число осцилляций в случае (6) вообще говоря меньше, чем в случае (6а).

В связи с изложенным можно сделать следующие два замечения.

1. Специфика модели типа IX по сравнению с моделью типа VIII состоит в том, что при $\lambda = \mu = 1$ разность $\lambda a^2 - \mu b^2$ в уравнениях (1) мала вместе с разностью $a - b$; а такое сокращение требует не только одинаковости знаков величин λ и μ, но и существенно связано с их постоянством. Можно ожидать поэтому, что в наиболее общем случае неоднородной пространственной метрики характер ее временной зависимости в течении длинных эр будет соответствовать (6), а не (6а). Это заключение действительно подтверждается аналитическим построением общего решения для длинной эры, как это будет показано в другом месте В.А.Белинским и И.М.Халатниковым.

2. Однородное пространство типа VII имеет бесконечный объем, в то время как пространство типа IX замкнуто. Поэтому совокупность этих двух примеров свидетельствует об отсутствии прямой связи между колебательным режимом приближения к особой точке и открытостью или закрытостью модели.

Институт физических проблем
Академии наук СССР
Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
29 декабря 1969 г.

Литература

[1] I.M.Khalatnikov, E.M.Lifshitz. Phys. Rev. Lett., 24, 1970.
[2] В.А.Белинский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 56, 1700, 1969.
[3] Ch. W.Misner. Phys. Rev. Lett., 22, 1071, 1969.