Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 4, стр. 172 –174 25 февраля 1985 г.

$N = 3$ ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Р.Э.Каллош

Получено полное решение $N = 3$ констрейнтов, удовлетворяющее тождествам Бианки, а также описан тензорный анализ суперсимметричной теории Янга – Миллса в гармоническом суперпространстве.

Важность изучения теорий расширенных суперсимметрий определяется тем, что с ними связываются надежды на построение единой теории поля. В последний год в этой области имеется значительный прогресс, связанный с возможностью геометрического описания $N= 2$ и $N= 3$ суперсимметричных теорий Янга – Миллса [1, 2], использующего понятие гармонического суперпространства, или пространства с дополнительными измерениями [3]. Особенно важные результаты были получены в [2], где впервые было построено явно суперсимметричное действие $N= 3$ теории Янга – Миллса, зависящее от аналитических суперполей, связностей для гармонических производных.

Для полного геометрического описания этой теории было необходимо указать все $N= 3$ констрейнты, т. е. уравнения для геометрических величин, ограничивающие число независимых полей в теории, и получить решение этих констрейнтов, а также построить тензорный анализ этой теории в гармоническом суперпространстве. Решение этой задачи и содержится в данной работе.

Мы используем аналитический базис [2], в котором элементы пространства имеют вид $Z^M = \{z^m = \{x^{\alpha\dot\alpha}_{\text{ан}}, \theta^{(a,b)}_{\alpha}, \bar\theta^{(-a,-b)}_{\dot\alpha}\}, u_i^{(-a,-b)}, \bar u^{(a,b)i}\}$, $u\bar u = \det u = 1$. Теория плоского $N= 3$ гармонического суперпространства описывается с помощью ковариантных производных $D_A = \{D_{\alpha\dot\alpha}, D^{(-a,-b)}_{\alpha}, \bar D^{(a,b)}_{\dot\alpha}, D_r\}$, где 8 гармонических производных – это $D_r = \{D^{(1,3)}, D^{(-1,3)}, D^{(2,0)}, D^{(-1,-3)}, D^{(1,-3)}, D^{(-2,0)}, D^{(0,0)}_1, D^{(0,0)}_2\}$. Первые 3 производные приведены в [2], вторые три – это их комплексно сопряженные (с учетом $\overline{u_i^{(-a,-b)}} = \bar u^{(-a,-b)i}$), а две последние (2$U(1)$ генератора) получаются из коммутации $D^{(-1,3)}$ с $D^{(1,-3)}$ и $D^{(2,0)}$ с $D^{(-2,0)}$, соответственно. В плоском суперпространстве существуют отличные от нуля компоненты тензора кручения, определяемого равенством $[D_A, D_B\} = T_{AB}^{\ \ C} D_C$:

$$T_{rs}^{\ \ t} = f_{rs}^{\ \ t}, \qquad T^{(a,b)(a_1,b_1)\beta\dot\beta}_{\alpha\ \ \dot\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\delta^{a,-a_1}\delta^{b,-b_1}, \tag{1}$$

$$T^{(a,b)(a_1b_1)(a_2,b_2)\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{a+a_1,a_2}\delta^{b+b_1,b_2}, \tag{2}$$

где $f_{rs}^{\ \ t}$ – это структурные константы группы $SU(3)$. Все остальные компоненты тензора кручения, кроме (1), (2) равны нулю.

Теория Янга – Миллса определяется путем введения связности A_A, т. е. ковариантной производной $\mathcal{D}_A + iA_A$

$$[\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B\} = T_{AB}^{\ \ C}\mathcal{D}_C + F_{AB} \tag{3}$$

с законом преобразования

$$\mathcal{D}'_A = e^{i\lambda} D_A e^{-i\lambda}, \tag{4}$$

где λ – это аналитическое суперполе. В λ-геометрии условие аналитичности означает [2]

$$\mathcal{D}^{(1,1)}_{\alpha}\lambda = D^{(1,1)}_{\alpha}\lambda = 0, \qquad \bar{\mathcal{D}}^{(0,2)}_{\dot\alpha}\lambda = \bar D^{(0,2)}_{\dot\alpha}\lambda = 0, \tag{5}$$

Построим далее все компоненты λ-ковариантной производной $\mathcal{D}_A$, исходя из двух произвольных аналитических суперполей, гармонических связностей

$$A \equiv A^{(-1,3)}, \quad \overset{*}{\bar{A}} \equiv A^{(2,0)}, \quad D_\alpha^{(1,1)} A^{(-1,3)}_{(\ 2,0)} = \bar{D}_{\dot\alpha}^{(0,2)} A^{(-1,3)}_{(\ 2,0)} = 0. \tag{6}$$

Для этого определим ограниченные препотенциалы v и $\overset{*}{\bar{v}}$, $v \neq \overset{*}{\bar{v}}$

$$A^{(-1,3)} \equiv -i e^{iv}(D^{(-1,3)} e^{-iv}),$$
$$A^{(2,0)} \equiv -i e^{i\overset{*}{\bar{v}}}(D^{(2,0)} e^{-i\overset{*}{\bar{v}}}). \tag{7}$$

Препотенциалы v, $\overset{*}{\bar{v}}$ в отличие от $N=2$ теории и от $N=3$ теории на массовой оболочке, определены с точностью до некоторых функций, имеющих частичную зависимость от гармонических переменных. Удается, однако, построить объекты, в которых этот произвол исчезает, т. е. имеется однозначная зависимость от исходных неограниченных потенциалов $A^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}$ [1]

$$A^{(1,-3)} = -ie^{iv}(D^{(1,-3)} e^{-iv})$$
$$A^{(-2,0)} = -ie^{i\overset{*}{\bar{v}}}(D^{(-2,0)} e^{-i\overset{*}{\bar{v}}}) \tag{8}$$

Для построения оставшихся четырех гармонических связностей удобно использовать так называемые "условные" констрейнты

$$F^{(-1,3)(2,0)} = F^{(1,-3)(-2,0)} = F^{(-1,3)(1,-3)} = F^{(2,0)(-2,0)} = 0, \tag{9}$$

что определяет $A^{(1,3)}$, $A^{(-1,-3)}$, $A_1^{(0,0)}$ и $A_2^{(0,0)}$ через уже построенные связности

$$[\mathcal{D}^{(-1,3)}, \mathcal{D}^{(2,0)}] \equiv \mathcal{D}^{(1,3)}; \ [\mathcal{D}^{(1,-3)}, \mathcal{D}^{(-2,0)}] \equiv \mathcal{D}^{(-1,-3)};$$
$$[\mathcal{D}^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}, \mathcal{D}^{(1,-3)}_{(-2,\ 0)}] \equiv \mathcal{D}^{(0,0)}_{\substack{1\\2}}. \tag{10}$$

Перейдем далее к построению спинорных производных. Две из них $A_\alpha^{(1,1)}$ и $\bar{A}_{\dot\alpha}^{(0,2)}$ в λ-геометрии равны нулю, что решает "сохраняющие представления" констрейнты

$$F_{\alpha\ \beta}^{(1,1)(1,1)} = F_{\alpha\ \dot\alpha}^{(1,1)(0,2)} = F_{\dot\alpha\ \dot\beta}^{(0,2)(0,2)} = 0. \tag{11}$$

Для определения четырех остальных $A^{(a,b)}_{\substack{\alpha\\ \dot\alpha}}$ удобно наложить "условные" констрейнты вида

$$F_\alpha^{(1,1)(-2,0)} = F_\alpha^{(1,1)(-1,-3)} = F_{\dot\alpha}^{(0,2)(1,-3)} = F_{\dot\alpha}^{(0,2)(-1,-3)} = 0. \tag{12}$$

Это дает спинорные связности, как функции уже определенных выше величин:

$$[D_\alpha^{(1,1)}, \mathcal{D}^{(-2,\ 0)}_{(-1,-3)}] \equiv \mathcal{D}^{(-1,\ 1)}_{\alpha\,(\ 0,-2)}; \ [\bar{D}_{\dot\alpha}^{(0,2)}, \mathcal{D}^{(\ 1,-3)}_{(-1,-3)}] \equiv \mathcal{D}^{(\ 1,-1)}_{\dot\alpha\,(-1,-1)}. \tag{13}$$

Наконец, для определения векторной связности $A_{\alpha\dot\alpha}$ накладываем "условный" констрейнт

$$F_{\alpha\ \dot\alpha}^{(1,1)(-1,-1)} \equiv F_{\alpha\ \dot\alpha}^{(0,-2)(0,2)} = 0, \tag{14}$$

что дает

$$\{\mathcal{D}_\alpha^{(1,1)}, \mathcal{D}_{\dot\alpha}^{(-1,-1)}\} \equiv \{\mathcal{D}_{\dot\alpha}^{(0,-2)}, \mathcal{D}_\alpha^{(0,2)}\} \equiv \ _{\alpha\dot\alpha} \tag{15}$$

---

[1] Заметим, что построенные таким образом λ-ковариантные $\mathcal{D}^{(a,b)}$ не равны $\overline{\mathcal{D}^{(-a,-b)}}$.

Итак, связность A_A, компоненты которой определены выше в $(6-8)$, (10), (13), (15), является функционалом от неограниченных аналитических суперполей $A, \overset{*}{A}$ от их производных, а также содержат нелокальную в u-пространстве связь $A, \overset{*}{A}$ через интегральные операторы типа $\left(D^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}\right)^{-1} \overset{(-1,3)}{A^{(2,0)}}$, входящие через v, $\overset{*}{\bar{v}}$.

За исключением указанных выше компонент F_{AB} равных нулю, все остальные компоненты напряженности отличны от нуля и являются функционалами от $A^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}$, от $\left(D^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}\right)^{-1}$ $\overset{*}{A}{}^{(-1,3)}_{(\ 2,0)}$ и их производных. Это λ-тензоры размерности ноль $F_{rs} \neq 0$, т. е. $F^{(-1,3)(1,3)} = W^{(0,6)}$, $F^{(2,0)(1,3)} = W^{(3,3)}$, $F^{(1,-3)(-1,-3)} = W^{(0,-6)}$ и т. д. за исключением (9), λ-тензоры размерности 1/2, за исключением (12), т. е. тензора $F^{(1,1)(1,-3)}_{\alpha} = W^{(2,-2)}_{\alpha}$, $F^{(0,2)(-2,0)}_{\dot\alpha} = W^{(-2,2)}_{\dot\alpha}$ и т. д. Наконец, это λ-тензоры размерности 1, кроме (11), (14), например $F^{(1,1)(-1,1)}_{\alpha\ \beta} = \epsilon_{\alpha\beta} W^{(0,2)}$, $F^{(1,1)(1,-1)}_{\alpha\ \dot\beta} = W^{(2,0)}_{\alpha\dot\beta}$. Наличие зависимостей между тензорами определяется тем, что все они являются функционалами от A, $\overset{*}{A}$.

Рассмотрим теперь λ-геометрию $N = 3$ суперсимметричной теории Янга – Миллса на массовой оболочке, что означает добавление к представленным выше кинематическим констрейнтам целого ряда динамических констрейнтов. Полная совокупность их в этом случае имеет вид

$$F_{rs} = F_{r\ \alpha}^{\ (a,b)} = F_{r\ \dot\alpha}^{\ (a,b)} = F^{(a,b)(a_1,b_1)}_{\alpha\ \ \dot\beta} - \frac{1}{3}\delta^{a,-a_1}\delta^{b,-b_1}\sum_{(a,b)} F^{(a,b)(-a,-b)}_{\alpha\ \ \dot\alpha} =$$
$$= F^{(a,b)(a_1,b_1)}_{\alpha\ \ \beta} + F^{(a_1,b_1)(a,b)}_{\alpha\ \ \beta} = 0 . \qquad (16)$$

Таким образом, отличные от нуля на массовой оболочке λ-тензоры имеют вид $F^{(a,b)(a_1,b_1)}_{\alpha\ \ \beta}$, $F^{(a,b)(a_1,b_1)}_{\dot\alpha}$, $a - a_1 \neq 0$ или $b - b_1 \neq 0$. Тождества Бианки, которым нужно удовлетворить, накладывая (16), имеют вид

$$\mathcal{D}_r F^{(a,b)(a_1,b_1)}_{[\alpha\ \ \beta]} - T_r^{\ \gamma(c,d)(a,b)} F^{(c,d)(a_1,b_1)}_{[\alpha\ \gamma\ \ \beta]} = 0. \qquad (17)$$

Они выглядят значительно проще в центральном базисе, где все $T_r^{\beta(c,d)(a,b)}{}_{\alpha} = 0$:

$$\mathcal{D}_r F^{[ij]}_{\alpha\beta} = 0 . \qquad (18)$$

Таким образом, ковариантная независимость от гармонических направлений физического тензора напряженности $F^{[ij]}_{\alpha\beta}$ в λ-геометрии обеспечивает внутреннюю самосогласованность теории.

Детальное доказательство и анализ сделанных в работе утверждений будут представлены в отдельной публикации.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность А.Гальперину, Е.Иванову, В.Огиевецкому и Э.Сокачеву за обсуждения, стимулировавшие настоящее исследование.

Литература

1. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Class. Quantum Grav., 1984, **1**, 469.
2. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Preprint Dubna E2-84-441, 1984.
3. *Рослый А.А.* Кн.: Теоретико-групповые методы в физике. Труды Междунар. семинара, Звенигород, 1982 г. М.: Наука, 1983, т. 1, стр. 263.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 января 1985 г.