Письма в ЖЭТФ

Т. 9 *1969* *Вып. 3*

24

КВАНТОВОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

В.И.Мельников

Обычный вывод кинетического уравнения [1] основан на разделении воздействия на электрон внешнего поля и столкновений с рассеивателями. Считается, что электрон между столкновениями движется под действием поля как классическая частица с законом дисперсии, определяемым зонной структурой полупроводника, а вероятность рассеяния электрона не зависит от поля. Соответственно этому, кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE\frac{\partial f}{\partial p} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[W(p', p)f(p') - W(p, p')f(p)\right], \qquad (1)$$

где правая часть содержит столкновительный член, а левая – силовой. $f(p)$ – функция распределения электронов по импульсам, E – электрическое поле, в общем случае зависящее от времени, e – заряд электрона, $W(p', p)$ – вероятность перехода из состояния p' в состояние p. $W(p', p)$ в общем случае есть сумма членов вида

$$|M(p', p)|^2\delta[\epsilon(p') - \epsilon(p) \pm \epsilon_{p',p}], \qquad (2)$$

где $M(p', p)$ – матричный элемент оператора взаимодействия электрона с рассеивателем, $\epsilon(p)$ – энергия электрона, $\epsilon_{p',p}$ – энергия, теряемая или приобретаемая электроном при рассеянии.

Целью настоящей работы является вывод квантового кинетического уравнения для электронов в однородном высокочастотном поле $E(t) = E_0\cos\omega t$ в условиях сравнимости кванта энергии поля $\hbar\omega$ и средней энергии электрона $\bar{\epsilon}$.

Вывод проведем на примере электронов с квадратичным законом дисперсии. Вводя электрическое поле через вектор-потенциал $A(t) = -\frac{E_0 c}{\omega}\sin\omega t$, где c – скорость света, и решая уравнение Шредингера ($\hbar = 1$)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \epsilon(p, t)\psi; \quad \epsilon(p, t) = \frac{\left[p - \frac{e}{c}A(t)\right]^2}{2m}, \qquad (3)$$

получим волновую функцию электрона в поле

$$\psi_p(\mathbf{r}, t) = \exp\{ i\mathbf{pr} - i\int_0^t \epsilon(\mathbf{p}, t')dt'\}. \qquad (4)$$

В условиях $\omega\tau \gg 1$ (τ – время свободного пробега) канонический импульс $\mathbf{p}$ является хорошим квантовым числом, так как он меняется только за счет столкновений. Естественно поэтому писать кинетическое уравнение для функции распределения электронов по каноническому импульсу $F(\mathbf{p})$ (мы обозначаем одной буквой канонический и кинематический импульсы, так как достаточно разных обозначений для соответствующих функций распределения).

Амплитуда рассеяния из состояния $\psi_{p'}(\mathbf{r}, t)$ в состояние $\psi_p(\mathbf{r}, t)$ определяется интегралом

$$\int\psi_p^*(r, t)\, H_{int}\psi_{p'}(\mathbf{r}, t)\, d\mathbf{r}dt. \qquad (5)$$

Видно, что включение однородного электрического поля в $\psi_p(\mathbf{r}, t)$ не изменяет результата интегрирования по координатам. Интеграл по времени, приводивший ранее к закону сохранения энергии вида $\delta[\epsilon(\mathbf{p}') - \epsilon(\mathbf{p}) - \epsilon_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}]$ теперь изменится:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-i\int_0^t[\epsilon(\mathbf{p}', t') - \epsilon(\mathbf{p}, t') \pm \epsilon_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}]dt'\}dt =$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} i^{\ell} I_{\ell}\left(\frac{e\mathbf{E}_0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{m\omega^2}\right)\delta[\epsilon(\mathbf{p}') - \epsilon(\mathbf{p}) \pm \epsilon_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} + \ell\omega]. \qquad (6)$$

При получении уравнения (6) использовано соотношение $\exp[ix\cos\omega t] = \sum_{\ell} i^{\ell} I_{\ell}(x)\exp i\ell\omega t$, где $I_{\ell}(x)$ – функция Бесселя.

Из формулы (6) следует, что квантовое кинетическое уравнение получается из уравнения (1) вычеркиванием слагаемого с высокочастотным полем в левой части (1) (так как высокочастотное поле полностью учтено в интеграле столкновений) и заменой выражений вида (2) на

$$|M(\mathbf{p}',\mathbf{p})|^2 \sum_{\ell} I_{\ell}^2\left(\frac{e\mathbf{E}_0(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{m\omega^2}\right)\delta[\epsilon(\mathbf{p}') - \epsilon(\mathbf{p}) \pm \epsilon_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} + \ell\omega]. \qquad (7)$$

Выпишем конкретный вид квантового кинетического уравнения для случая рассеяния электронов на фононах

$$0 = 2\pi^2 g^2 \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}|m_{\mathbf{k}}|^2 \sum_{\ell} I_{\ell}^2\left(\frac{e\mathbf{E}_0\mathbf{k}}{m\omega^2}\right)\left\{\left[(1 + N_{\mathbf{k}})\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} + \ell\omega) +\right.\right.$$

$$\left. + N_{\mathbf{k}}\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}} + \ell\omega)\right]F(\mathbf{p}+\mathbf{k}) -$$

$$- [(1 + N_k)\delta(\epsilon_p - \epsilon_{p+k} - \omega_k + \ell\omega) + N_k \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p+k} + \omega_k + \ell\omega)]F(p)\Big\}. \quad (8)$$

Обозначения те же, что и в [2]. В левую часть формулы (8) может быть обычным образом записано $(\partial F/\partial t) + eE_1(\partial F/\partial p)$, если E_1 – слабо переменное поле. Как следует из выражения (8), квантовое кинетическое уравнение явным образом учитывает возможность "многофотонного" поглощения или излучения электрического поля электронами полупроводника.

Уже упоминалось, что критерием годности уравнения (8) является $\omega\tau \gg 1$. Строго этот критерий может быть получен при выводе формулы (8) с использованием систематической методики, предложенной в [2]. Предельный переход в уравнении (8) при $\omega \ll \epsilon_p$ дает уравнение, совпадающее с тем, которое получается после перехода в классическом кинетическом уравнении вида (1) к каноническому импульсу с последующим усреднением по времени в условиях $\omega\tau \gg 1$.

При слабых полях в формуле (8) следует заменить I_0 на 1, вместо $I_1(x)$ подставить $x/2$, а остальные члены суммы отбросить, так как при малых x функции Бесселя $I_\ell(x) \sim 1/\ell! \cdot (x/2)^\ell$. Если аргумент функции Бесселя порядка единицы, важны все члены ряда. Оценка величины поля дает в этом случае $E_0 \sim e^{-1}(m\hbar)^{1/2}\omega^{3/2}$. Если принять $m \sim 0{,}05 \cdot 10^{-27}$ *г*, $\omega \sim 2 \cdot 10^{14}$ *сек*$^{-1}$ (лазер на CO_2), то $E_0 \sim 3 \cdot 10^5$ *в/сек*, что хотя и велико, но реально достижимо.

Из уравнения (8), в частности, следует, что влияние высокочастотного поля на упругое рассеяние электрона (член с $\ell = 0$) приводит к изменению проводимости полупроводника при облучении светом [3].

Постановка рассмотренной задачи принадлежит В.М.Буймистрову. Автор признателен В.М.Буймистрову, З.С.Грибникову и Э.И.Рашба за обсуждение результатов.

Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
2 января 1969 г.

Литература

[1] А.И.Ансельм. Введение в теорию полупроводников. М., Физматгиз, 1962, гл. 7.

[2] Л.В.Келдыш. ЖЭТФ, 47, 1515, 1964.

[3] В.М.Буймистров. Письма в ЖЭТФ, 8, 274, 1968.