Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 5, стр. 206 – 208 *10 марта 1985 г.*

НОВЫЙ МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ СОЛИТОНОВ В НЕМАТИКЕ

В.Г.Каменский, С.С.Рожков

Показано, что учет высших градиентных членов в свободной энергии нематических жидких кристаллов приводит к нелинейному уравнению движения директора, допускающему солитонные решения.

В последнее время начались исследования нелинейной динамики жидких кристаллов, приводящей к образованию солитонных структур в распределении директора. Такие образования могут легко наблюдаться экспериментально с помощью оптических методов.

В работе [1] была предложена качественная теория для объяснения наблюдавшейся экспериментально [2] структуры солитонного типа, возникающей в распределении директора нематического жидкого кристалла под влиянием однородного сдвигового потока. Нелинейная динамика директора нематика, находящегося в постоянном магнитном поле и возбуждаемого импульсом электрического или магнитного поля, была рассмотрена в работе [3]. Было показано, что при определенных соотношениях параметров задачи, реализуется распределение директора солитонного типа.

В данной работе предлагается новый механизм образования солитонов, основанный на учете высших членов в разложении свободной энергии по градиентам директора $\mathbf{n}$. Необходимость такого учета в ряде случаев для других систем была продемонстрирована в работах [4 – 6]. Отметим, попутно, что результаты данной работы с некоторыми видоизменениями могут быть приложимы для описания нелинейной динамики сверхтекучего He^3 и магнитных систем. Обычно для получения уравнений движения директора $\mathbf{n}$ нематического жидкого кристалла ограничиваются квадратичными по пространственным производным членами разложения свободной энергии. Учитывая, что энергия должна быть инвариантна относительно преобразований группы $D_{\infty h}$, потребуем, чтобы этой же инвариантностью обладали высшие по градиентам члены и ограничимся учетом инвариантов четвертого порядка $(\partial^2_{ik}\mathbf{n})^2$, $(\partial_i \mathbf{n})^4$, $(\partial_i \mathbf{n}\,\partial_k \mathbf{n})^2$ и т. д. Кроме того, будем считать, что задача эффективно одномерная (т. е. все изменения $\mathbf{n}$ однородны в плоскости, перпендикулярной некоторой оси x). Такая постановка задачи рассматривалась в [3] и имеет то преимущество, что в этом случае не возникают так называемы обратные потоки.

Уравнение движения директора $\mathbf{n} = (0, \sin\varphi, \cos\varphi)$ в этом случае имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} = c^2\,[\varphi_{xx}(1 + \alpha\varphi_x^2) + \beta\varphi_{xxxx}]. \qquad (1)$$

Здесь $c^2 = K/J$, $\gamma = \gamma_1/J$, $\alpha = A/K$, $\beta = B/K$, K – вращательная константа Франка, J – момент инерции директора, γ_1 – вращательная вязкость, A и B – соответствующие комбинации коэффициентов при инвариантах четвертого порядка в свободной энергии.

Пусть теперь в начальный момент времени в некоторой области образца создается начальное возмущение (однородное в плоскости yz и имеющее характерный размер L по оси x), в котором $\varphi(t = 0) = 0$, $\dot{\varphi}(t = 0) = 2g_0$. При выполнении условия $g_0 \gg \gamma$ в уравнении (1) можно пренебречь диссипативным членом. Очевидно, если вид начального возмущения таков, что $\alpha g_0^2/c^2$, $\beta/L^2 \ll 1$, в (1) можно пренебречь нелинейным и дисперсионным членами. В результате за время $t \sim L/c$ начальное возмущение распадется на две плоские волны $\varphi = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$, которые могут теперь рассматриваться как независимые.

Считая, что начальное возмущение имело симметричный по x вид, рассмотрим эволюцию волны бегущей вправо (полное решение очевидно будет симметрично относительно начала координат). Переходя к безразмерным переменным $\xi = (x - ct)/L$, $\tau = |\beta|\,ct/2L^3$ и вводя функцию $u(\xi,\tau) = |6\beta/\alpha|^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$, получим для нее

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \operatorname{sign}\alpha\, 6u^2 u_\xi + u_{\xi\xi\xi}\operatorname{sign}\beta = 0 \qquad (2)$$

т. е. модифицированное уравнение Кортевега де Вриза (МКдВ). Выбирая в качестве начальных данных для этого уравнения вид производной $\partial\varphi/\partial\xi$ при $t = L/2c$, можно решить его методом обратной задачи рассеяния [7].

Важной характеристикой решений уравнения (2) являются знаки констант α и β. При различных знаках уравнение (2) вообще не может иметь солитонных решений. При одинаковых знаках вид решения будет зависеть как от знака α и β, так и от величины начальных данных задачи. Если g_0L/c больше некоторого числа ~ 1, определяющегося решением спектральной задачи для $(\partial\varphi/\partial\xi)(\xi, \tau = 0)$, а $\operatorname{sign}\alpha, \beta > 0$, то решение (2) состоит из солитонов, распространяющихся в положительном направлении ξ, и непрерывного спектра, распространяющегося в отрицательном направлении. При отрицательных знаках α и β солитоны и непрерывный спектр распространяются в обратных направлениях. Солитонные решения (2) имеют вид [7]

$$u_i = 2\lambda_i \operatorname{sech}(8\lambda_i^3\tau - 2\lambda_i\xi + \delta_0^i), \qquad (3)$$

где λ_i – модули мнимых собственных значений спектральной задачи, δ_0^i – фазы, которые могут быть вычислены при учете взаимодействия солитонов с непрерывным спектром и между собой. Из (3) видно, что наиболее узкий солитон с шириной $\sim 1/2\lambda_{i\,max}$ движется с бо́льшей скоростью $v = 4\lambda^2_{i\,max}$. Поскольку амплитуда непрерывного спектра уменьшается как $\tau^{-1/2}$ [8], по прошествии некоторого времени решение будет в основном определяться солитонами. Считая, что время τ достаточно велико, так что солитоны находятся друг от друга на расстояниях, превышающих их характерные размеры, найдем $\varphi(\xi)$, учитывая, что $\varphi(\infty) = 0$. Интегрирование выражения (3) по ξ дает для каждого солитона u_i

$$\varphi_i = 2\,|\alpha/6\beta|^{-1/2} \operatorname{arc\,tg}\{\exp[8\lambda_i^3\tau - 2\lambda_i\xi + \delta_0^i]\}. \qquad (4)$$

Таким образом, окончательный вид функции φ в координатах x, t будет представлять собой на больших временах ряд ступеней высоты $\pi(6\beta/\alpha)^{1/2}$, разделенных узкими, порядка λ_i^{-1} областями, распространяющимися со скоростями, близкими к скорости c. Оптическая картина, соответствующая этому решению, будет состоять из ряда полос разной интенсивности, разделенных узкими переходными областями.

Естественно, что для полного описания решения, необходимо знать вид начальных возмущений, что дает возможность вычислить характерные времена, масштабы, значения λ_i и δ_0^i. Результаты для конкретных случаев будут приведены в более подробной статье. До сих пор обсуждался случай достаточно плавного по x начального возмущения. Уравнение (1) допускает также решения вида уединенной волны, соответствующий сосредоточенному начальному возмущению,

$$\varphi = 2|6\beta/\alpha|^{1/2} \operatorname{arc\,tg}\exp\left[\pm(x - wt)\left(\frac{w^2/c^2 - 1}{\beta}\right)^{1/2}\right], \quad (\operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}\beta), \qquad (5)$$

которая будет распространяться со скоростью w, не обязательно близкой к скорости c. Однако в этом случае не существует способа получения точного решения для произвольных начальных данных.

Экспериментальное наблюдение может дать по крайней мере информацию о знаках констант α и β, даже при качественном совпадении предложенной картины с экспериментальной.

Литература

1. *Lin Lei, Shu Changqing, Sher Juelian.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1335.
2. *Zhu Guozhen.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1332.
3. *Каменский В.Г.* ЖЭТФ, 1984, **87**, 1262.
4. *Чечеткин В.Р.* ЖЭТФ, 1976, **71**, 1463.
5. *de Vega H.J.* Phys. Rev., 1978, **D18**, 2945.
6. *Ashida M., Takegi S.* Progr. Theor. Phys., 1981, **65**, 1.
7. *Wadati M.* J. Phys., Soc. Jap., 1973, **34**, 1289.
8. *Ablowitz M., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 1981.

Институт физики
Академии наук Украинской ССР

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 января 1985 г.