Письма в ЖЭТФ, том 15, вып 1, стр. 56 – 60 5 января 1972 г.

УВЛЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЖИДКОСТЬЮ ЧЕРЕЗ НЕПОДВИЖНУЮ ТВЕРДУЮ СТЕНКУ

А.Ф.Андреев, А.Э.Мейерович

В работе [1] был рассмотрен вопрос о влиянии звуковых флуктуаций (фононов) на гидродинамические свойства жидкости. Учет этих флуктуаций особенно существенен в тех случаях, когда речь идет о явлениях, которые в принципе могли бы существовать, но отсутствуют в обычной гидродинамике. Например, в обычной гидродинамике отсутствует термомеханический эффект, который возникает лишь при учете фононов [1].

Цель настоящей статьи – привлечь внимание к следующему эффекту, который является, пожалуй, наиболее ярким проявлением фононов. Рассмотрим два слоя жидкости, разделенных неподвижной твердой перегородкой (см. рис. 1). Пусть в области I происходит пуазейлевское течение. Согласно уравнениям обычной гидродинамики жидкость в области II остается неподвижной. Ситуация изменяется, если принять во внимание возможность передачи импульса из области I в область II фононами, проходящими сквозь твердую перегородку. При этом должно наблюдаться увлечение жидкости в области II, так что распределение скоростей должно иметь вид, изображенный на рис. 1.

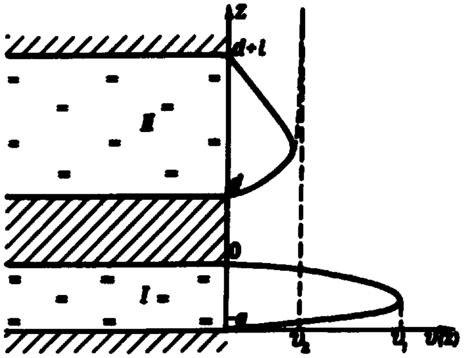

Рис. 1

Вычисление скорости увлечения может быть произведено на основе полученных в [1] уравнений движения. Запишем прежде всего кинетическое уравнение для фононов в жидкости:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\chi}{c n_z \tau} = \frac{\epsilon n_x}{c} \cdot \frac{dv}{dz}, \qquad (1)$$

где функция χ определяет отклонение функции распределения фононов n от равновесного значения n_0 согласно формуле

$$n = n_0 + \chi \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon},$$

ϵ – энергия фонона, c – скорость звука, τ – время свободного пробега фононов, v – скорость жидкости, $\mathbf{n}$ – единичный вектор вдоль импульса фонона.

Мы предположим, что коэффициент прохождения фононов W через твердую стенку мал. Это дает нам возможность при решении уравнения (1) в области I считать коэффициент отражения равным единице и написать граничные условия для функции χ при $z = 0, -a$ в виде $\chi(n_z) = \chi(-n_z)$. Путем подстановки пуазейлевского профиля скорости $v(z) = v_1\{1-(1+2z/a)^2\}$ вправую часть уравнения (1) и его решения с приведенными граничными условиями легко определить значение χ_0 функции χ при $z = 0$:

$$\chi_0 = -v_1 \frac{8\epsilon\tau}{a^2} n_x n_z \left\{ \frac{a}{2} - c n_z \tau + \frac{a}{\exp(a/c n_z \tau) - 1} \right\}. \qquad (2)$$

Мы предположим для простоты, что толщина ℓ слоя II значительно больше a. При этом профиль скоростей в основной части объема II будет линейным и для его полного определения достаточно рассмотреть случай $\ell = \infty$. (см. рис. 1 скорость v_2 совпадает со значением скорости при $z = \infty$ в случае $\ell = \infty$).

При $\ell = \infty$ функция X в области II удовлетворяет уравнению (1) без правой части и условию $X(z = d, n_z > 0) = X_0 W$, откуда находим $X(n_z < 0) = 0$, $X(n_z > 0) = X_0 W \exp\{(d - z)/c n_z \tau\}$. Интегрируя теперь уравнение движения жидкости (см. [1])

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \int \frac{\epsilon^3 d\epsilon\, do}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} n_x n_z \frac{\partial X}{\partial z}$$

с условиями $v(z = d) = 0$, $|v(z = \infty)| < \infty$ находим

$$v_2 = v(\infty) = \frac{c}{\eta} \int \frac{\epsilon^3 d\epsilon\, do}{(2\pi\hbar c)^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} n_x n_z^2 \tau X_0 W, \tag{3}$$

где η – коэффициент вязкости жидкости.

Основной вклад в интеграл (3) вносят фононы, энергия которых такова, что длина свободного пробега $c\tau$ порядка толщины слоя жидкости a. Если толщина перегородки d не слишком превышает a, то, поскольку поглощение звука в твердом теле значительно меньше, чем в жидкости, при вычислении W поглощением фононов в перегородке можно пренебречь. Условие малости W означает тогда, что должно быть малым отношение акустических сопротивлений жидкости и твердого тела: $\rho c / D c_t$, где ρ, D – плотности жидкости и твердого тела, c_t – скорость поперечного звука в твердом теле. При этом коэффициент прохождения фононов через границу раздела мал и поэтому фонон, прошедший в твердое тело, многократно отражается от обеих границ прежде, чем значительная часть энергии выйдет из перегородки. Отсюда ясно, что коэффициент W из объема I в объем II равен $(1 - R)/2$, где R – коэффициент отражения звука от границы жидкость – твердое тело. Используя известные выражения для R [3] и для поглощения звука в жидкости [2] $\tau = \rho \hbar^2 c^2 / \gamma \epsilon^2$, где $\gamma = \frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \frac{c_p - c_v}{c_p c_v}$, ζ – вторая вязкость, κ – коэффициент теплопроводности, c_p, c_v – теплоемкости единицы массы, находим из (3)

$$\frac{v_2}{v_1} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{T}{4\eta} \left(\frac{\rho^3 c}{\pi^5 \gamma^3 a}\right)^{1/2} \frac{\rho c}{D c_t} \Phi\left(\frac{c}{c_t}, \frac{c_\ell}{c_t}\right), \tag{4}$$

где

$$\Phi(x, y) = x^4 \left\{ \int_0^{1/y^2} \frac{(1 - y^2 t)^{1/2} t (1 - x^2 t)^{1/4} dt}{y(1 - 2t)^2 + 4t(1 - t)^{1/2}(1 - y^2 t)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{1/y^2}^{1} \frac{4(y^2 t - 1) t^2 (1 - t)^{1/2} (1 - x^2 t)^{1/4} dt}{y^2(1 - 2t)^4 + 16 t^2 (1 - t)(y^2 t - 1)} \right\},$$

c_ℓ – скорость продольного звука в твердом теле, ζ – функция Римана. График функции $\Phi(x, y)$, полученный в результате численного расчета, приведен на рис. 2.

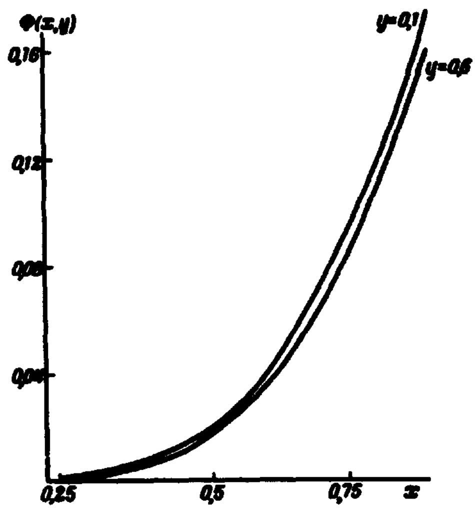

Рис. 2

При выводе написанной формулы мы в качестве равновесной функции распределения n_0 использовали ее классическое выражение T/ϵ, поскольку большинство жидкостей при понижении температуры затвердевает раньше, чем начинают играть роль квантовые эффекты. Заметим также, что для применимости формулы (4) необходимо, чтобы в жидкости отсутствовала дисперсия звука вплоть до частот, соответствующих длине пробега, равной a. Другими словами, толщина a должна быть больше, чем $\rho c^3 / \gamma \omega_0^2$, где ω_0 – частота, выше которой начинается существенная дисперсия.

Для пары вода – полистирол (или плексиглас) из формулы (4) для v_2/v_1 получается величина, равная примерно $10^{-7}/\sqrt{a}$ (a в *см*) при $T = 353$ °K и $10^{-8}/\sqrt{a}$ при $T = 293$°K, а для пары ртуть – серебро при $T = 293$°K – около $10^{-8}/\sqrt{a}$.

Отношение полных потоков жидкости через области II и I отличается, как легко видеть, от величины v_2/v_1 множителем $3\ell/4a$. В условиях же, когда жидкость в области II покоится, в ней возникает градиент давления, отношение которого к градиенту давления в области I равно $(3a^2/4\ell^2)(v_2/v_1)$.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1971 г.

Литература

[1] А.Ф.Андреев. ЖЭТФ, 59, 1819, 1970.

[2] Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.

[3] Л.М.Бреховских. Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.