Письма в ЖЭТФ, том 15, вып 2, стр.116 – 120 20 января 1972 г.

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕЙ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Г. Е. Воловик

В настоящей работе рассматривается образование вихрей в сверхтекучей жидкости, движущейся относительно стенок сосуда, при $T = 0$. Так как нормальная компонента отсутствует, теория флуктуационного образования вихрей [1] неприменима. Основную роль в данном случае играет взаимодействие жидкости со стенками сосуда. В результате этого взаимодействия состояние однородного движения жидкости может квантовомеханическим образом перейти в состояние движения с вихрем при той же полной кинетической энергии жидкости. Взаимодействие жидкости со стенкой происходит за счет неоднородностей на стенке сосуда, которые возмущают однородное движение жидкости. На возможность такого механизма образования вихрей впервые указал Вайнен [2]. Подобный квантовомеханический переход из одного макроскопического состояния в другое рассматривался в работах [3, 4], в которых описывался туннельный процесс образования зародышей при фазовом переходе. Однако в данном случае вместо подбарьерного туннелирования имеет место надбарьерное отражение.

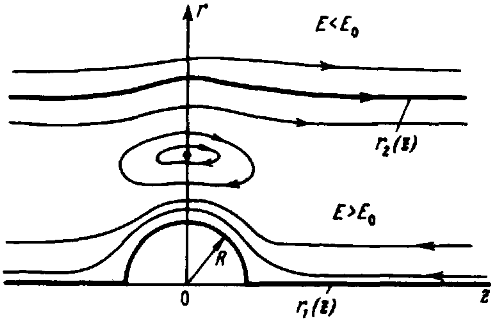

Рис. 1

Будем рассматривать неоднородности с характерным размером $R \gg a$, где a – радиус кора вихря, имеющий атомный размер. Это дает возможность применить гидродинамическое описание. Для удобства рассмотрим неоднородность в виде полусферы радиуса R на плоской стенке сосуда, которая обтекается жидкостью со скоростью u на бесконечности. Будем искать вероятность образования вихря, имеющего форму полукольца, концы которого свободно скользят по стенке. При движении вихря плоскость полукольца все время остается перпендикулярной к u, а ось кольца проходит через центр сферы.

Пусть r – радиус кольца, а z – координата его плоскости, отсчитанная от центра сферы в направлении u. Тогда уравнения движения вихря имеют следующий вид (см. например [5]):

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\pi\rho\kappa r}\frac{\partial E}{\partial z}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\pi\rho\kappa r}\frac{\partial E}{\partial r}, \tag{1}$$

где κ – циркуляция скорости, ρ – плотность жидкости, E – полная кинетическая энергия жидкости с вихрем. В данной геометрии E лёгко вычисляется, так как после зеркального отражения мы получаем кольцо и шар, имеющие общую ось [6] :

$$E(r, z) = E_o + \frac{1}{4}\rho\kappa^2 \left\{ r\left(\ln\frac{8r}{a} - 2\right) - \right.$$

$$\left. - rQ_{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2 + z^2 - R^2}{rR}\right)^2\right] + \frac{2\pi u}{\kappa} r^2\left[1 - \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2}\right)^{3/2}\right]\right\}, \tag{2}$$

где $Q_{1/2}$ – шаровая функция второго рода, E_o – кинетическая энергия жидкости в отсутствие вихря.

Кривые $E(r, z) = \text{const}$ являются траекториями движения вихря. Траектории вихря с $\kappa < 0$ изображены на рис. 1. Стрелками показаны направления движения вихря. Жирными линиями выделены траектории $r_1(z)$ и $r_2(z)$ с $E = E_0$. Траектория $r_1(z)$ проходит по поверхности сферы, а вне ее описывает движение кольца с нулевым радиусом ($r \sim a$). Эта траектория соответствует движению жидкости в отсутствии вихрей. Требуется найти вероятность перехода с траектории $r_1(z)$ на траекторию $r_2(z)$.

Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что уравнения (1) имеют гамильтонову форму. Действительно, если ввести $p = (\pi/2)\rho\kappa r^2$, то из уравнений (1) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial z}. \tag{3}$$

Следовательно, p и z – канонически сопряженные переменные. Поэтому можно ввести оператор Гамильтона $H(p, z) = E(r(p), z)$ и перейти к одномерной квазиклассической задаче о переходе с траектории $p_1(z)$ на траекторию $p_2(z)$ путем надбарьерного отражения.

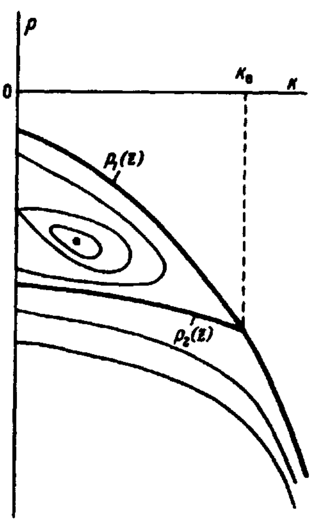

Рис. 2

Для ее решения требуется найти в комплексной плоскости z классическую точку перехода. Очевидно, в силу четности гамильтониана относительно z, эта точка находится на мнимой оси. Траектории $E(r(p), ik) = \text{const}$ с $\kappa < 0$ показаны на рис. 2. Жирными линиями выделены траектории $p_1(ik)$ и $p_2(ik)$ с энергиями $E = E_0$. Точка их пересечения k_0 является точкой перехода. Вероятность перехода равна [7]:

$$w = A\exp\left\{-\frac{2\operatorname{Im}S}{\hbar}\right\} = A\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_0^{k_0} dk\left[p_1(ik) - p_2(ik)\right]\right\}, \tag{4}$$

где S – действие вдоль линии перехода.

Можно вычислить $\mathrm{Im}\, S$ в двух предельных случаях:

$$\mathrm{Im}\, S = \frac{\rho\kappa^2 R^2}{6u}\left(\ln\frac{|\kappa|}{ua}\right)^2, \qquad \frac{|\kappa|}{R} << u << \frac{|\kappa|}{a}; \qquad (5)$$

$$\mathrm{Im}\, S = \frac{\rho\kappa^4}{24\pi^2 u^3}\left(\ln\frac{|\kappa|}{ua}\right)^3, \qquad u << \frac{|\kappa|}{R}.$$

Вычисление предэкспоненциального множителя A в (4) в общем случае невозможно. Для его оценки заметим, что в пристеночном слое ширины порядка a движение жидкости является непотенциальным. Этот вихревой слой можно заменить совокупностью вихрей с радиусами порядка a, которые распределены с поверхностной плотностью $n \sim u/a|\kappa|$. Множитель A пропорционален потоку этих вихрей, сечению их рассеяния на неоднородности и числу неоднородностей N, т. е. $A \sim u^2 RN/a|\kappa|$.

При $u << |\kappa|/R$ $\mathrm{Im}\, S$ не зависит от радиуса R. Нужно выяснить, зависит ли эта величина от формы неоднородности. Если неоднородность имеет форму $r^2 + \beta^2 z^2 = R^2$, то расчет значительно усложняется. Однако при $u << |\kappa|/R$ можно получить главный член в $\mathrm{Im} S$ из следующих соображений. Траектория $r_1(z)$ проходит по поверхности неоднородности и, следовательно, ее уравнение $r^2 + \beta^2 z^2 = R^2$.

Отсюда, переходя на мнимую ось $z = ik$ получаем $p_1(z) = (\pi/2)\rho\kappa(R^2 + \beta^2 k^2)$. $p_2(z)$ при малых u слабо зависит от z, поэтому ее можно считать постоянной на мнимой оси:

$$p_2(z) \approx \frac{\pi}{2}\rho\kappa\left(\frac{\kappa}{2\pi u}\ln\frac{|\kappa|}{ua}\right)^2.$$

Пересечение траекторий осуществляется в точке

$$k_0 \approx \frac{|\kappa|}{2\pi u\beta}\ln\frac{|\kappa|}{ua}.$$

Отсюда (см. (4)):

$$\mathrm{Im}\, S \approx \frac{\rho\kappa^4}{24\pi^2 u^3\beta}\left(\ln\frac{|\kappa|}{ua}\right)^3. \qquad (6)$$

Таким образом, наиболее выгодной для рождения вихрей формы неоднородности является форма половинки плоского диска ($\beta \to \infty$).

В заключение автор выражает благодарность С.В.Иорданскому за постановку задачи и руководство работой.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 декабря 1971 г.

Литература

[1] С.В.Иорданский. ЖЭТФ, 48, 708, 1965.

[2] W.F.Vinen. Progr. Low Temp. Phys., 3, Amsterdam, 1961.

[3] И.М.Лифшиц, Ю.Каган. ЖЭТФ, 62, 1, 1972.

[4] С.В.Иорданский, А.М.Финкельштейн. ЖЭТФ, 62, 1, 1972.

[5] A.Walraven. Phys. Rev., AI, 145, 1970.

[6] Г.Ламб. Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.

[7] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, М., 1963.