Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 1, стр. 21 – 23 *10 января 1984 г.*

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

С.П.Обухов

В рамках теории возмущения показано, что двумерное блуждание в слабонеоднородной среде сводится к чистой диффузии. Недиффузионное поведение при блуждании в сильно неоднородной среде, наблюдавшееся в численном эксперименте [2], объясняется существованием небольших глубоких ловушек и не связано с размерностью пространства.

Мы рассмотрим задачу о случайном блуждании частицы на решетке размерности d. В каждом узле решетки i вероятности $P_{i\to j}$ перескоков к соседним узлам j есть случайные фиксированные для данного узла величины $\sum_j P_{i\to j} = 1$. Известно, что в одномерном случае, такое блуждание оказывается сильно негауссовским, среднее смещение зависит от числа шагов (или времени) как $R(N) \propto \ln^2 N$ [1]. Для двумерной задачи ситуация не ясна. В работе Маринари, Паризи и др. [2] приводятся результаты машинного моделирования такого случайного блуждания и показано, что в зависимости от степени неоднородности блуждание при больших N сводится либо к свободному (диффузия), либо имеет недиффузионное поведение $R(N) \propto N^{\alpha}$, $\alpha < 1/2$ или $R(N) \propto \ln N$.

Для описания случайного блуждания в слабо неоднородной среде мы воспользуемся диаграммной техникой, разработанной в работе автора и Пелити [3] (см. также обзор [4]). Введем в каждом узле i вектор $b_i = \sum_j P_{i\to j} e_{ij}$ (e_{ij} – вектора от точки i до ближайших соседних точек). Блуждание в слабо неоднородной среде можно рассматривать как чисто диффузионное с наложенными на него сдвигами на величины b_i в каждой проходимой точке. В континуальном пределе получим для функции корреляции такого блуждания :

$$G(0,0;\ \mathbf{r},t) = \int D\phi D\phi^* \phi(0,0)\,\phi(\mathbf{r},t)\exp\{-(H_0 + H_I)\}, \qquad (1а)$$

$$H_0 = \int_0^\infty dt \int dr\, \phi^*(\mathbf{r},t)\left[-\frac{\partial}{\partial t} + D^{(0)}\nabla^2\right]\phi(\mathbf{r},t), \qquad (1б)$$

$$H_{\rm I} = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r}\, \phi(\mathbf{r},t)\,(1 - e^{\mathbf{b}(\mathbf{r})\vec{\nabla}})\,\phi^*(\mathbf{r},t). \qquad (1в)$$

Мы будем считать $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ случайной функцией с коррелятором

$$\langle \mathbf{b}(\mathbf{r})\mathbf{b}(\mathbf{r}')\rangle = 2d\gamma^{(0)}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (2)$$

Разлагая (1 а) по степеням $H_{\rm I}$ и вычисляя средние по теореме Вика нетрудно убедиться, что мы получаем ряд теории возмущений для задачи случайного блуждания с последовательным учетом одной, двух и т.д. неоднородностей. После усреднения по всем возможным полям $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ мы получаем, ограничиваясь членом второй степени по градиентам:

$$H_{\rm I} = -\gamma^{(0)}\int_0^\infty dt\,dt' \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\, \phi(\mathbf{r},t)\vec{\nabla}\phi^*(\mathbf{r},t)\,\phi(\mathbf{r}',t')\vec{\nabla}\phi^*(\mathbf{r}',t'). \qquad (1г)$$

Уравнения ренорм-группы для блуждания с взаимодействием типа (1г), содержащим вторую степень градиента, были получены в общем виде автором и Пелити [3]. Для частного случая (1г) (в обозначениях работы [3] это означает, что $g_1^{(0)} = g_3^{(0)} = -\gamma^{(0)}$ см. также [4]) мы получим

$$d\gamma / d\xi = -\gamma^2/2, \qquad (3)$$

где $\xi = \ln a'/a$ – логарифмы величины отношения масштабов. Уравнение имеет ноль-зарядное решение $\gamma = \gamma^{(0)} / (1 + \gamma^{(0)}\xi/2)$. Заметим, что поправка первого порядка по γ к величине $D^{(0)}$ – коэффициенту диффузии тождественно равна нулю, а второго имеет вид –

$-\int\limits_0^\infty c\ \gamma^2 D^{-3} d\xi = -2c\gamma^{(0)}D^{(0)-3}$, где $c \sim 1$, т.е. учет взаимодействия (1г) приводит лишь к некоторой перенормировке коэффициента диффузии на больших масштабах. Члены высшего порядка по градиентам, которыми мы пренебрегли при выводе (1г), также дают некоторую перенормировку коэффициента диффузии, но она происходит на малых масштабах и ее можно считать уже включенной в $D^{(0)}$. Аналогично, если распределение случайного поля $b(r)$ не является чисто гауссовым, это приводит к членам вида $(\phi \vec{\nabla} \phi^*)^n$, $n > 2$ в (1г) и легко видеть, что на больших расстояниях они также несущественны.

Блуждание в неоднородной среде сводится к чисто случайному так же в пространстве размерности меньшей двух: в уравнениях (3) – (5) надо лишь заменить $\xi = \ln a'/a$ на

$$\xi = \frac{1}{\epsilon}\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^{\xi} - 1\right], \quad \epsilon = 2 - d. \tag{4}$$

Тем не менее известно [1], что при $d = 1$ блуждание в неоднородной среде является локализованным. Случай $d = 1$ является выделенным, т.к. любое распределение случайных сил на прямой можно описать с помощью потенциала V так, чтобы $b = \nabla V$. Условие потенциальности случайной силы является очень сильным, поскольку при этом для каждой точки пространства необходимо ввести вероятность ее достижения e^V; при этом пользоваться исходным приближением (1б) нельзя.

Теперь мы покажем, как в численном эксперименте работы [2] возникала "локализация". В эксперименте для каждой точки решетки генерировались распределения вероятностей переходов: $P_{i\to j} = a_{ij} / \sum\limits_j a_{ij}^K$, где a_{ij} – случайные числа из интервала (0,1), при малых K распределение вероятностей $P_{i\to j}$ слабо неоднородное, при больших K, одна из вероятностей $P_{i\to j}$ близка к единице, а остальные малы. Рассмотрим теперь простейшую ловушку, состоящую из двух расположенных рядом узлов. Из узла 1 частица с подавляющей вероятностью переходит в узел 2 и наоборот. Это значит, что из чисел a_{1j} число a_{12} больше всех других. Введем величину q_1, равную отношению a_1^* / a_{12}, где a_1^* максимальное из всех $Z - 1$ оставшихся чисел a_{1j} (Z – число ближайших соседей). Вероятность выйти из ловушки, т.е. пойти не в точку 2, а в другую точку, будет q_1^K. Число шагов N, необходимых для выхода из такой ловушки больше чем $N_0 \sim q_1^{-K}$. Вероятность того, что q_1, $q_2 < q$, где q – некоторое число, вычисляется элементарно и равна $Z^{-1} q^{2Z-2}$. Таким образом ловушки с числом выхода N распределены как $F(N) \sim N^{[-(2Z-2)/K]-1}$. Эта функция очевидно нормируема, т.е. $\int\limits_1^\infty F(N)\,dN$ существует и определяется малыми N. Но среднее время выхода из ловушки определяется выражением

$$\bar{N} = \int\limits_1^\infty N F(N)\,dN \Big/ \int\limits_1^\infty F(N)\,dN \tag{5}$$

и расходится при $K \geqslant K_c = 2Z - 2$. Для двумерной квадратной решетки $K_c = 6$. Число n преодоленных ловушек не пропорционально полному числу шагов N, а зависит от N как $N^{6/K}$ (при $K = 6$ $n \propto N/\ln N$). Учет более сложных ловушек из трех, четырех и т.д. узлов существенен только при $K \geqslant 8$, но, по-видимому, не приводит к изменению указанной выше асимптотики. Среднее расстояние, пройденное за N шагов будет $R(N) \propto N^{3/K}$ ($K > 6$) и стремится к $R(N) \propto \ln N$ в пределе больших K. Спектральная плотность низкочастотного шума, генерируемого таким блужданием $S(f) \propto f^{(-6/K)-1}$, стремится к $1/f$ при $K \to \infty$. В этом предельном случае наша модель аналогична модели Мак Вортера [5], предложенной для объяснения шума в полупроводниках. Заметим, что эффект недиффузионного блуждания в сильно неоднородной среде не зависит от размерности пространства, а связан только с локальными свойствами среды (в нашем случае он определяется координационным числом решетки). Расчеты при малых K, проведенные в работе [2] подтверждают наш вывод о чисто случайном блуждании в слабо неоднородной среде.

Я глубоко благодарен Д.Е.Хмельницкому, К.М.Ханину и Э.И.Рашба за стимулирующие обсуждения и критические замечания.

Литература

1. *Синай Я.Г.* Теория вероятностей и ее приложения, 1982, 27, 247.
2. *Marinari E., Parisi G., Ruelle D., Windey P.* Phys. Rev. Lett., 1983, 50, 1223.
3. *Obukhov S., Peliti L.* J. Phys., 1983, A16, L147.
4. *Peliti L.* Self-avciding walks, Les Houches Lectures. April 1983.
5. *McWhorter A.L.* In Semiconductor Surface Physics, edited by R.H.Kingston (University of Pennsylvania, Philadelphia, p. 207, 1957.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 ноября 1983 г.