Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 2, стр. 72 – 75 *25 января 1984 г.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ДЕТЕРМИНАНТА В ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ ВАКУУМА

В.Г.Киселев, К.Г.Селиванов

Вычислена вероятность распада ложного вакуума в теории поля размерности (1 + 1).

В этой статье мы получим в явном виде полное выражение для вероятности распада метастабильного вакуума. Задача о вычислении вероятности такого процесса возникает в широком классе физических теорий: в космологии, в теории фазовых переходов [1], в теории дислокаций. В работах [1] были вычислены экспоненциальные факторы для подобных распадов, но до сих пор не удавалось получить полный ответ.

Каллан и Коулмен [2] получили выражение предэкспоненты в виде функционального детерминанта. В настоящей работе предложен метод, позволяющий вычислить этот детерминант, и получено замкнутое выражение в приближении тонкой стенки.

Вероятность распада ложного вакуума определяется выражением [2]

$$\frac{\Gamma}{V} = \frac{B}{2\pi}(D')^{-1/2}\exp(-B-\delta B);\quad D' = \frac{\det'(-\partial^2 + U''(\bar\phi))}{\det(-\partial^2 + U''(\phi_+))}\ . \tag{1}$$

Здесь $B = S(\bar\phi) - S(\phi_+)$; $\delta B = S_i(\bar\phi) - S_i(\phi_+) - B$, где S_i – затравочное действие. Здесь и далее перенормированные величины пишутся без соответствующего индекса. В формуле (1) $\bar\phi$ – решение евклидовых уравнений движения (баунс). В пределе малой разности плотностей энергии вакуумов оно выглядит как пузырь стабильного вакуума, который отделен от ложного тонкой сферической стенкой радиуса R. Штрих у детерминанта означает, что пропущено нулевое собственное значение.

Простейшая модель с ложным вакуумом описывается евклидовым действием

$$S = \int d^2x\,[\,\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + U(\phi)]\ ;\ U(\phi) = \frac{\lambda}{8}(\phi^2 - a^2)^2 + \frac{\epsilon}{2a}\phi. \tag{2}$$

В этой теории существуют два вакуума ϕ_+ и ϕ_- со своими значениями масс μ_+ и μ_-. Все конкретные вычисления будут сделаны в этой модели в пределе $\epsilon \to 0$. С учетом членов первого порядка по ϵ потенциал $U''(\bar\phi)$, определяющий детерминант в (1), дается выражением ($\lambda a^2 = 1$)

$$U''(\bar\phi) = 1 - \frac{3}{2}\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{r-R}{2} - \frac{3\epsilon}{2a^2}\,\mathrm{th}\,\frac{r-R}{2}\,. \tag{3}$$

Далее всюду величины с чертой относятся к баунсу, а с крестом – к ложному вакууму.

Для вычисления отношения детерминантов D' в формуле (1) представим его в виде $D' = D_1' D_2$, где

$$D_1' = \frac{\det'(-\partial^2 + U''(\bar{\phi}))}{\det(-\partial^2 + 1 - V_{th})}; \quad D_2 = \frac{\det(-\partial^2 + 1 - V_{th})}{\det(-\partial^2 + U''(\phi_+))}; \quad V_{th} = \frac{3\epsilon}{2a^2}\,\mathrm{th}\,\frac{r-R}{2}. \qquad (4)$$

Можно показать, что в D_1' вычеркивание V_{th} не сказывается на результате с точностью до ϵ^2.

Вычисление детерминантов будем производить следующим методом. В d-мерном евклидовом пространстве отношение детерминантов сферически симметричных операторов представимо в виде

$$X \equiv \frac{\det(-\partial^2 + \tilde{U}(r))}{\det(-\partial^2 + U(r))} = \prod_{l,\,n_l}\left(\frac{\tilde{E}_{l,\,n_l}}{E_{l,\,n_l}}\right)^{s_{d,\,l}}. \qquad (5)$$

Здесь $s_{d,\,l}$ – степень вырождения уровней энергии $\tilde{E}_{l,\,n_l}$ и $E_{l,\,n_l}$ с заданными моментом l и радиальным квантовым числом n_l. Каждое произведение по n_l в (5) есть отношение детерминантов одномерных уравнений Шредингера. Мы будем использовать для вычисления метод [3], описанный в работе Гельфанда и Яглома, где показано, что

$$J_l \equiv \frac{\det(-d^2/dr^2 + C_l/r^2 + \tilde{U}(r))}{\det(-d^2/dr^2 + C_l/r^2 + U(r))} = \frac{\tilde{N}(0)\tilde{N}(T)\int_0^T dr\,\tilde{N}^{-2}}{N(0)N(T)\int_0^T dr\,N^{-2}}. \qquad (6)$$

Здесь $r = 0$ и $r = T$ – границы краевой задачи, C_l/r^2 – центробежный потенциал. Функции N и $\tilde{N}$ есть произвольные не обращающиеся на промежутке $(0, T)$ в ноль решения уравнений

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{C_l}{r^2} + U(r)\right)N = 0 \qquad (7)$$

и аналогичное уравнение для $\tilde{N}$ с потенциалом $\tilde{U}$. В дальнейших вычислениях мы выбираем все пары функций N и $\tilde{N}$ так, чтобы $N(0) = \tilde{N}(0)$ и $\int dr\,N^{-2} = \int dr\tilde{N}^{-2}$. Очевидно это возможно. Тогда $J_l = \tilde{N}(T)/N(T)$ и отношение детерминантов принимает вид

$$X = \prod_l J_l^{s_{d,\,l}} = \prod_l (\tilde{N}_l(T)/N_l(T))^{s_{l,d}}. \qquad (8)$$

Формула (6) написана для нештрихованного детерминанта. Чтобы обойти трудность с нулевым собственным значением в D_1, добавим к потенциалам в числителе и знаменателе (4) константу M, которая потом будет устремлена к нулю. Тогда для D_1 верна формула (8). Очевидно, что все отличие J_l от единицы набегает в области ямы потенциала (3): При $l \ll R^{3/2}$ центробежный потенциал над ямой можно считать постоянным (при этом ошибка в J_l будет порядка l^2/R^4). Тогда соответствующее уравнение Шредингера становится точно решаемым и J_l легко находится.

$$J_l = \frac{(k-1)(k-1/2)}{(k+1)(k+1/2)}; \quad k^2 = 1 + M + \frac{4l^2 - 1}{4R^2}. \qquad (9)$$

При конечном M J_l найдено с ошибкой порядка $1/R^2$. При стремлении M к нулю этой точности не хватает потому, что возникает семейство уровней $\tilde{E}_{l,\,0}$, которые сами порядка

l^2/R^2. Точность можно повысить, если в произведении (6) заменить эти $\widetilde{E}_{l,0}$ их правильными значениями $\bar{E}_{l,0}$. Как показано в [2], $\bar{E}_{l,0}$ можно легко найти потребовав, чтобы $\bar{E}_{1,0}$, отвечающее нулевой моде, равнялось нулю, тогда получаем $\bar{E}_{l,0} = (l^2-1)/R^2$. Коррекция J_l, определенного выражением (6), сводится к домножению его на $\bar{E}_{l,0}/\widetilde{E}_{l,0}$. Теперь, полагая $M=0$, получаем окончательно

$$J_l = \frac{(k-1)(k-1/2)}{(k+1)(k+1/2)} \frac{4(l^2-1)}{4l^2-1}, \quad l \neq 1; \; J_1' = 1/12. \tag{10}$$

Заметим, что J_1' в точности равно инстантонному детерминанту одномерной квантовой механики.

Из (10) видно, что при $l \gg R$ J_l выходит на свою асимптотику $\ln J_l \approx \frac{-3R}{l}$. Так как при этих же значениях момента начинает работать метод WKB, такое поведение сохраняется при произвольно больших l и произведение по моментам расходится. Это есть проявление ультрафиолетовых расходимостей.

Введем размерную регуляризацию. От числа измерений зависят вид центробежного потенциала, степень вырождения $s_{d,l}$, действие на баунсе B_d, радиус пузыря R_d и объем V_d шара радиуса T. Например [4]

$$s_{d,l} = \frac{\Gamma(l+d)}{\Gamma(d)\,\Gamma(l+1)} - \frac{\Gamma(l+d-2)}{\Gamma(d)\,\Gamma(l-1)}. \tag{11}$$

Теперь для D_1' применима формула (8). Мы вычислили D_1' с требуемой точностью, сведя произведение при больших l к интегралу.

Вычисление D_2 проще. Во-первых, не возникает трудности с нулевым собственным значением, во-вторых, для нахождения J_l при любых значениях момента применим метод WKB.

Таким образом, мы можем найти отношение детерминантов D' в размерности $2+\Delta$.

$$D' = \pi^2 R^2 \exp\left[\frac{15\epsilon R^{2+\Delta}}{2\Delta}\left(1+\Delta\left(\gamma-\frac{23}{10}-\ln 2+\frac{\pi}{5\sqrt{3}}\right)\right)\right]. \tag{12}$$

Расходимости в D' исчезают при перенормировке параметров теории. δB из формулы (1) в d-мерном пространстве имеет вид:

$$\delta B = B_d\left(\frac{d}{2}\frac{\delta\lambda}{\lambda} + 3d\frac{\delta a}{a} - (d-1)\frac{\delta\epsilon}{\epsilon}\right). \tag{13}$$

Найдем теперь $\delta\lambda = \lambda_i - \lambda$, δa и $\delta\epsilon$. Проще всего это сделать на языке эффективного потенциала. Известно, что

$$U_{eff}(\phi) = U_i(\phi) + \frac{1}{2}\ln\det\left(-\partial_d^2 + U''(\phi)\right), \tag{14}$$

где ϕ – произвольное постоянное поле. Зафиксируем контрчлены следующими условиями:

$$U'_{eff}(a) = \epsilon/2a; \quad U''_{eff}(a) = 1; \quad U^{IV}_{eff}(a) = 3\lambda. \tag{15}$$

Вычисление детерминанта в (14) проводится уже изложенным методом. Используя (13), (14), (15), мы получаем

$$\delta B = \frac{15BR^{\Delta}}{4\pi a^2}\frac{1}{\Delta}\left[1+\Delta\left(\gamma - 7/5 - \ln 2\right)\right]. \tag{16}$$

С учетом (12) и (16) мы получаем для вероятности распада ложного вакуума выражение

$$\frac{\Gamma}{V} = \frac{\epsilon}{2\pi} \exp\left[-B + \frac{B}{\pi a^2} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \right) \right]. \qquad (17)$$

Полный анализ отброшенных членов показывает, что в показателе экспоненты ошибка порядка ϵ^{α}, где $0 < \alpha < 1$. Поэтому обобщение метода на случай бóльшего числа измерений требует более громоздких вычислений.

Авторы глубоко признательны И.Ю.Кобзареву, по инициативе и при постоянном внимании которого была сделана эта работа, и М.Б.Волошину за обсуждение результатов.

Литература

1. *Лифшиц И.М., Каган Ю.* ЖЭТФ, 1972, **62**, 385; *Петухов Б.В., Покровский В.Л.* ЖЭТФ, 1972, **63**, 634; *Волошин М.Б., Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б.* ЯФ, 1974, **20**, 1229.
2. *Curtis G. Callan, Jr., Coleman S.* Phys. Rev. D, 1977, **16**, 1762.
3. *Gel'fand I.M., Yaglom A.M.* J.Math. Phys., 1960, **1**, 48; *Dashen R.F., Hasslacher B., Neveu A.* Phys. Rev. D, 1974, **10**, 4114.
4. *Barut A.O., Raczka R.* Theory of group representations and applications, Warszawa, 1977; *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения, М.: Мир, 1980.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
7 ноября 1983 г.