Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 2, стр. 75 – 78 *25 января 1984 г.*

О РЕЛЯТИВИСТСКИХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

Р.А.Фрик

Получены двухкомпонентные уравнения для частиц со спином 1/2, когда операторы Гамильтона и импульса параметризованы переменными возникающими при определении базисных функций и собственных значений инвариантов основной серии унитарных представлений группы Лоренца.

В [1] было показано, что если для гайзенберговых операторов частиц определить зависимость не только от времени t, как обычно, но и от точек x_k трехмерного евклидова пространства систем отсчета, то преобразование Шапиро или преобразование Фурье на группе Лоренца, впервые осуществленное в [2], обобщается до преобразования Фурье на группе Пуанкаре. В представлении Шредингера для волновой функции (ВФ) в [1] были записаны уравнения в переменных t, x_k, содержащие в правой части операторы Гамильтона $H^{(0)}$ и импульса $\mathbf{P}^{(0)}$ частицы со спином [3] 0,

$$H^{(0)} = \operatorname{ch} i \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{i}{\alpha} \operatorname{sh} i \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{2\alpha^2} \exp i \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad ; \tag{1}$$

$$\mathbf{P}^{(0)} = - \mathbf{n} \left(e^{i\frac{\partial}{\partial \alpha}} - H^{(0)} \right) - \left[\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}(\theta, \varphi) \right] \frac{1}{\alpha} \exp i \frac{\partial}{\partial \alpha} \, ; \tag{2}$$

$$0 < \alpha < \infty; \quad |\mathbf{n}| = 1; \quad \mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Переменные представления α, $\mathbf{n}$, с помощью которых можно согласно [2-5] параметризовать состояния релятивистских частиц, возникают при определении базисных функций и собственных значений инвариантов группы Лоренца $F = \mathbf{N}^2 - \mathbf{J}^2$; $G = \mathbf{NJ}$. Операторы $H^{(0)}$, $\mathbf{P}^{(0)}$ и операторы момента $\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{L}(\theta, \varphi) \equiv \mathbf{L}$, а также операторы

$$\mathbf{N}^{(0)}(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\alpha - i) + [\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}] \tag{3}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре [1)].

Поскольку, согласно [1] операторы дифференцирования $-i(\partial/\partial x_k)$ не есть операторы импульса, то представляет интерес найти операторы Гамильтона H, импульса $\mathbf{P}$, момента $\mathbf{J}$ и операторы $\mathbf{N}$ для частиц со спином 1/2 в „α, $\mathbf{n}$" представлении. В данной работе такие операторы найдены и записаны уравнения для ВФ таких частиц. Отметим, что ранее (см., например [6]) сделаны попытки найти операторы Гамильтона и импульса для частиц со спином в „α, $\mathbf{n}$" представлении. Однако записанные в [6] формальные выражения для этих операторов помимо α, $\mathbf{n}$ определены также через переменные импульсного представления, что смысла не имеет.

Исходя из известного вида для $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\vec{\sigma}}{2}$, где $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули, имеем

$$\mathbf{N}(\alpha, \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\alpha - i) + [\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}]. \tag{4}$$

Перестановочные соотношения алгебры Ли группы Лоренца выполняются. Кроме того $F = 1 + \alpha^2 - {}^1/_4$. При определении H, $\mathbf{P}$ будем исходить из базисных функций инварианта F в импульсном представлении. В этом случае [7]

$$N_k(p) = i p_0 \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{1}{2}\frac{[\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}]_k}{p_0 + 1}; \quad J_k(\mathbf{p}) = i\epsilon_{kij} p_j \frac{\partial}{\partial p_0} + \frac{\sigma_k}{2}, \tag{5}$$

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 1; \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Отделяя в уравнении

$$F(\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{n}) = \left(1 + \alpha^2 - \frac{1}{4}\right)\Psi(\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{n}) \tag{6}$$

функцию $f^* = (p_0 - \mathbf{pn})^{-1+i\alpha}$ можно получить два двухкомпонентных решения

$$\Psi_{1/2}(\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{n}) = D^* \cdot f^* \cdot \chi_{1/2}; \quad \Psi_{-1/2}(\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{n}) = D^* \cdot f^* \cdot \chi_{-1/2}, \tag{7}$$

где

$$D^* = \frac{p_0 - \mathbf{pn} + 1 - i\vec{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\cdot\mathbf{n}]}{\sqrt{2(p_0 + 1)(p_0 - p\cdot n)}}; \quad D^* \cdot D = 1; \quad \chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Введем далее в рассмотрение функции от переменных α, $\mathbf{n}$

$$\Psi_{1/2}(\alpha, \mathbf{n}; \mathbf{p}) = Df\chi_{1/2}; \quad \Psi_{-1/2}(\alpha, \mathbf{n}, \mathbf{p}) = Df\chi_{-1/2}, \tag{9}$$

где $f = (p_0 - \mathbf{pn})^{-1-i\alpha}$ – собственная функция операторов $H^{(0)}$, $\mathbf{P}^{(0)}$. С помощью оператора

$$B = 2\,\mathrm{ch}\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} - i\frac{\mathbf{L}\cdot\vec{\sigma}}{\alpha - \frac{i}{2}}\exp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} \tag{10}$$

---

1) Применяется система единиц в которой $m = 1$, $\hbar = 1$, $c = 1$.

(9) можно представить в виде

$$\Psi_{1/2}(\alpha,\mathbf{n},\mathbf{p}) = B\frac{f}{\sqrt{2(p_0+1)}}\cdot\chi_{1/2}\,;\qquad \Psi_{-1/2}(\alpha,\mathbf{n},\mathbf{p}) = B\frac{f}{\sqrt{2(p_0+1)}}\chi_{-1/2}\,. \tag{11}$$

Найдем теперь такой оператор K для которого выполнялось бы равенство

$$KB = 2H^{(0)} + 2\,. \tag{12}$$

Подставляя в (12) $H^{(0)}$ и B находим

$$K = 2\operatorname{ch}\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{2i}{\alpha}\operatorname{sh}\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + i\frac{\mathbf{L}\vec{\sigma}}{\alpha-\frac{i}{2}}\exp\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\,. \tag{13}$$

Тогда из

$$B\left(\frac{KB}{2}-1\right)\frac{f}{\sqrt{2(p_0+1)}} = p_0 Df \tag{14}$$

получаем, что оператор $\frac{BK}{2} - 1$ на состояниях (9) диагонален с собственными значениями равными энергии частицы p_0. Это и есть искомый оператор H. В явном виде

$$H = \operatorname{ch}i\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{i}{2\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)}e^{i\frac{\partial}{\partial\alpha}} - \frac{i}{2\left(\alpha-\frac{i}{2}\right)}e^{-i\frac{\partial}{\partial\alpha}} + \frac{-\Delta_{\theta,\varphi}e^{i\frac{\partial}{\partial\alpha}} + \mathbf{L}\vec{\sigma}\left(e^{i\frac{\partial}{\partial\alpha}}-1\right)-1}{2\left(\alpha^2+\frac{1}{4}\right)}. \tag{15}$$

Операторы импульса $\mathbf{P}$ можно найти двумя способами, либо из перестановочных соотношений

$$[N_k(\alpha,\mathbf{n})H]_- = iP_k\,, \tag{16}$$

либо используя операторное выражение

$$BP_k^{(0)}K = 2HP_k + 2P_k\,, \tag{17}$$

которое вытекает из задачи на собственные значения

$$BP_k^{(0)}KB\frac{f}{\sqrt{2(p_0+1)}} = (2p_0 p_k + 2p_k)Df\,. \tag{18}$$

В обоих случаях

$$\mathbf{P} = -\mathbf{n}\left(e^{i\frac{\partial}{\partial\alpha}} - H\right) + \frac{-2\alpha[\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}] - \left(\alpha-\frac{i}{2}\right)[\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}] - (\mathbf{n}\sigma)\mathbf{L}}{2\,\alpha^2+\frac{1}{4}}e^{i\frac{\partial}{\partial\alpha}} + \frac{[\mathbf{n}\cdot\sigma]}{2\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)}\,. \tag{19}$$

Для найденных операторов помимо (16) выполняются и все остальные перестановочные соотношения алгебры Ли группы Пуанкаре.

В представлении Шредингера собственные функции (9) операторов H, $\mathbf{P}$ согласно [1] домножаются на $\exp - i(p_0 t - \mathbf{px})$. Так что для суперпозиции таких состояний вместо преобразования Фурье на группе Лоренца [4, 5] имеем обобщение

$$\Psi(\alpha,\mathbf{n},\mathbf{x}t) = \frac{1}{(\partial\pi)^3}\int\frac{d^3p}{p_0}Df\cdot e^{-i(p_0t-\mathbf{px})}\cdot\Psi(p)\,; \tag{20}$$

где

$$\Psi(\mathrm{p}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\mathrm{p}) \\ \Psi_2(\mathrm{p}) \end{pmatrix}.$$

Выполняются также уравнения

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\alpha, \mathbf{n}, \mathrm{x}, t) = H\Psi(\alpha, \mathbf{n}, \mathrm{x}t); \qquad -i\frac{\partial}{\partial x_k}\Psi(\alpha, \mathbf{n}, \mathrm{x}, t) = P_k\Psi(\alpha, \mathbf{n}, \mathrm{x}, t). \tag{21}$$

Литература

1. *Фрик Р.А.* ЯФ, 1983, **38**, 810.
2. *Шапиро И.С.* ДАН СССР, 1956, **106**, 647; ЖЭТФ, 1962, **43**, 1727.
3. *Kadyshevsky V.G. , Mir-Kasimov R.M., Skachkov N.B.* Nuovo Cim., 1968, **55 A**, 233; ЯФ, 1969, **9**, 219, 462; ЭЧАЯ, 1972, **2**, 635.
4. *Чжоу Гуанчжао, Заставенко Л.Г.* ЖЭТФ, 1958, **35**, 1417.
5. *Попов В.С.* ЖЭТФ, 1959, **37**, 1116.
6. *Mavrodiev S.* Fizika, 1977, **9**, 117.
7. *Широков Ю.М.* ДАН СССР, 1954, **94**, 857; **99**, 737.

Омский
государственный
педагогический институт
им. А.М.Горького

Поступила в редакцию
10 ноября 1983 г.