

КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ С ОДИНАКОВЫМИ СПЕКТРАМИ ЭНЕРГИИ

А.А. Андрианов, Н.В. Борисов, М.В. Иоффе

В случае двух и трех измерений предложен алгоритм, устанавливающий аналитическое соответствие между связанными состояниями различных квантовых систем. Это позволяет построить целый класс новых точно-решаемых многомерных задач.

1. В одномерной квантовой механике под названием "метод факторизации" существует красивый рецепт, сопоставляющий любому потенциалу с известными связанными состояниями серию новых потенциалов, для которых также оказываются известны энергии и явные выражения для волновых функций¹. Этот метод¹ использовался, например, для построения точно-решаемых потенциалов³, а недавно и для построения решений нелинейных уравнений⁴. В настоящей работе предлагается обобщение метода факторизации на случай большего числа измерений.

2. Напомним кратко основные моменты метода факторизации, необходимые для обобщения его на высшие размерности. Предположим, что для одномерного ($d = 1$) потенциала $V^{(0)}(x)$ известны волновые функции связанных состояний $\Psi_N^{(0)}$ с энергиями $E_N^{(0)}$ ($N = 0, 1, 2, \dots$)

$$H^{(0)} \Psi_N^{(0)} \equiv \left[-\frac{1}{2} \partial^2 + V^{(0)}(x) \right] \Psi_N^{(0)} = E_N^{(0)} \Psi_N^{(0)}; \quad E_0^{(0)} \equiv 0.$$

$H^{(0)}$ всегда можно представить в факторизованном виде

$$H^{(0)} = Q^+ Q^-, \quad (1)$$

¹) В несколько иной форме он известен как преобразование Дарбу².

где

$$Q^{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \partial + \partial \chi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \chi} \partial e^{\mp \chi}; \quad \chi \equiv - \ln \Psi_0^{(0)}(x).$$

Если построить новый гамильтониан $H^{(1)}$ по формуле

$$H^{(1)} = Q^- Q^+ = H^{(0)} + [Q^-, Q^+] = -\frac{1}{2} \partial^2 + V^{(1)}(x); \quad V^{(1)} \equiv V^{(0)} + \partial^2 \chi, \quad (2)$$

то выполнены следующие соотношения ("соотношения сплетания"):

$$H^{(1)} Q^- = Q^- H^{(0)}, \quad Q^+ H^{(1)} = H^{(0)} Q^+. \quad (3)$$

Именно в силу этих соотношений все волновые функции $\Psi_N^{(1)}$ гамильтониана $H^{(1)}$ связаны с волновыми функциями $\Psi_N^{(0)}$ (с теми же энергиями) исходной системы:

$$\Psi_N^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{N+1}^{(0)}}} Q^- \Psi_{N+1}^{(0)}(x), \quad \Psi_N^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_N^{(0)}}} Q^+ \Psi_{N-1}^{(1)}(x)$$

($N = 1, 2, \dots$).

Энергетический спектр $H^{(1)}$ получается из спектра $H^{(0)}$ просто "вычеркиванием" нижнего уровня $E_0^{(0)}$: $E_N^{(1)} = E_{N+1}^{(0)}$ ($N = 0, 1, 2, \dots$); $Q^- \Psi_0^{(0)} = 0$.

Эту процедуру построения новых точно-решаемых потенциалов можно повторить, исходя уже из $H^{(1)}$ и $\Psi_0^{(1)}$ и т. д. При этом получается серия потенциалов $V^{(n)}(x)$, спектр энергий и волновые функции связанных состояний для которых явно находятся по исходным. Так, стартуя с простейшего $V^{(0)}(x)$ — прямоугольной ямы с бесконечными стенками при $x = \pm \pi/2$ — немедленно получаем спектр связанных состояний в потенциалах вида $V^{(n)}(x) = \frac{n(n+1)}{2 \cos^2 x}$.

3. Для обобщения описанного алгоритма на случай двух измерений необходимо построить, исходя из гамильтониана $H^{(0)} = -\frac{1}{2} \Delta^{(2)} + V^{(0)}(x)$, $x = (x_1, x_2)$, такой гамильтониан $H^{(1)}$, который сплетается с $H^{(0)}$ по формулам, аналогичным (3), что обеспечит связь спектров и волновых функций $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$. Введем операторы

$$Q_l^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \partial_l + \partial_l \chi) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm \chi} \partial_l e^{\mp \chi}; \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x_l}; \quad l = 1, 2,$$

где снова $\chi(x) = - \ln \Psi_0^{(0)}$. Тогда $H^{(0)}$ принимает "факторизованный" вид

$$H^{(0)} = Q_1^+ Q_1^- + Q_2^+ Q_2^- \equiv Q_l^+ Q_l^- \quad (E_0^{(0)} \equiv 0). \quad (4)$$

Оператор Шредингера $H_{ik}^{(1)}$ с матричным 2×2 потенциалом $V_{ik}^{(1)}$

$$H_{ik}^{(1)} = \delta_{ik} H^{(0)} + [Q_i^-, Q_k^+] = -\frac{1}{2} \Delta^{(2)} \delta_{ik} + V_{ik}^{(1)}; \quad V_{ik}^{(1)}(x) = \delta_{ik} V^{(0)} + \partial_i \partial_k \chi \quad (5)$$

в силу коммутационных соотношений $[Q_i^-, Q_k^+] = \partial_i \partial_k \chi$, $[Q_i^+, Q_k^+] = 0$ сплетается с $H^{(0)}$ (по повторяющимся индексам — суммирование $i, k = 1, 2$):

$$H_{ik}^{(1)} Q_k^- = Q_i^- H^{(0)}, \quad Q_i^+ H_{ik}^{(1)} = H^{(0)} Q_k^+. \quad (6)$$

Отсюда следует, что операторы Q_l^- переводят все собственные функции $\Psi^{(0)}$ (кроме $\Psi_0^{(0)}$) в двухкомпонентные волновые функции $\Psi_k^{(1)}$, $k = 1, 2$ гамильтониана $H_{ik}^{(1)}$ с те-

ми же значениями энергии:

$$\Psi_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{E^{(0)}}} Q_k^- \Psi^{(0)}.$$

Однако, в отличие от одномерного случая, в потенциале $V_{ik}^{(1)}$ есть, вообще говоря, и другие уровни, волновые функции которых удовлетворяют уравнению $Q_k^+ \Psi_k^{(1)} = 0$. Такие волновые функции представимы в виде $\Psi_k^{(1)} = \epsilon_{kl} Q_l^+ \tilde{\Psi}^{(0)}$, где $\tilde{\Psi}^{(0)}$ — собственные функции другого скалярного гамильтониана

$$\tilde{H}^{(0)} = Q_l^- Q_l^+ = H^{(0)} + \Delta^{(2)}\chi. \quad (7)$$

Он сплетается с гамильтонианом $H_{ik}^{(1)}$ операторами $P_i^\pm = \epsilon_{ik} Q_k^\mp$ аналогично (6), а его спектр целиком вкладывается в спектр $H^{(1)}$ (включая и основное состояние $\tilde{H}^{(0)}$, лежащее всегда выше, чем $E_0^{(0)} \equiv 0$). Все связанные состояния в потенциале $V_{ik}^{(1)}$ получаются описанным выше образом из связанных состояний либо в потенциале $\tilde{V}^{(0)}$, либо в потенциале $\tilde{V}^{(0)} = V^{(0)} + \Delta^{(2)}\chi$. Уровень с нулевой энергией в потенциале $V_{ik}^{(1)}$, как и в одномерном случае, отсутствует. Указанные свойства $H_{ik}^{(1)}$ следуют из его разложения в прямую сумму операторов

$$H_{ik}^{(1)} = Q_i^- Q_k^+ + P_i^- P_k^+ \equiv \underline{H}_{ik}^{(1)} + \underline{H}_{ik}^{(1)}; \quad \underline{H}_{ik}^{(1)} \cdot \underline{H}_{kl}^{(1)} = 0.$$

Операторы $\underline{H}_{ik}^{(1)}$, $\underline{H}_{ik}^{(1)}$ не имеют правильного кинетического члена, но их спектры (кроме $E_0^{(0)} = 0$) в точности совпадают со спектрами $H^{(0)}$ и $\tilde{H}^{(0)}$, соответственно.

Полученный результат можно сформулировать и иначе: совпадают энергии связанных состояний (кроме $E_0^{(0)} = 0$) в двух матричных потенциалах

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial_i \chi)^2 - \partial_i^2 \chi & 0 \\ 0 & (\partial_i \chi)^2 + \partial_i^2 \chi \end{pmatrix} \text{ и } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\partial_i \chi)^2 + \partial_1^2 \chi - \partial_2^2 \chi & 2\partial_1 \partial_2 \chi \\ 2\partial_1 \partial_2 \chi & (\partial_i \chi)^2 - \partial_1^2 \chi + \partial_2^2 \chi \end{pmatrix},$$

а соответствующие волновые функции связаны друг с другом посредством Q_i^\pm, P_i^\pm . Существование таких квантовых систем с одинаковым спектром энергий является следствием *скрытой суперсимметрии*. Действительно, гамильтонианы $\tilde{H}^{(0)}, H^{(1)}, H^{(0)}$ являются компонентами суперсимметричного гамильтониана \hat{H} в подпространствах с фиксированным числом фермионов $n = 0, 1, 2$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} p_k^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \chi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_k^2 \chi) - (\partial_k \partial_l \chi) b_k^+ b_l^- = \{Q^+, Q^-\};$$

$$\{b_k^-, b_l^+\} = \delta_{kl}, \quad \{b_k^+, b_l^+\} = 0,$$

где операторы суперзаряда $Q^\pm = Q_l^\pm b_l^\pm$ изменяют число фермионов на 1. Из $[\hat{H}, Q^\pm] = 0$

следуют соотношения сплетения между $H^{(0)}, \tilde{H}^{(0)}, H^{(1)}$ (см. (6)). Как и в одномерном случае построение гамильтонианов с эквивалентными спектрами можно продолжить: стартова с потенциала $V_{ik}^{(1)}$ можно построить новый матричный 4×4 потенциал $V^{(2)}$, связанные состояния в котором получаются из состояний исходного $V_{ik}^{(1)}$ и дополнительного $V_{ik}^{(1)}$ и т. д. Более подробно этот алгоритм и его связь с суперсимметричной квантовой механикой будут рассмотрены в отдельной работе.

4. Рецепт построения $H^{(1)}$ можно обобщить и на более высокие размерности $d = 3, 4, \dots$. Так, для трехмерной системы решения уравнения $Q_k^+ \Psi_k^{(1)} = 0$ имеют вид $\Psi_k^{(1)} = \epsilon_{klm} Q_m^+ \Psi_l \equiv P_{kl}^- \Psi_l$, где $\Psi_l(\mathbf{x})$ — собственные функции (трехмерные столбцы) еще одного матричного гамильтониана $\tilde{H}_{ik}^{(1)}$. Оба гамильтониана $H_{ik}^{(1)}$ и $\tilde{H}_{ik}^{(1)}$ разбиваются

в прямую сумму взаимно-ортогональных слагаемых

$$H_{ik}^{(1)} = Q_i^- Q_k^+ + P_{il}^- P_{kl}^+ \equiv \underline{H}_{ik}^{(1)} + \underline{\underline{H}}_{ik}^{(1)},$$

$$\tilde{H}_{ik}^{(1)} = Q_i^+ Q_k^- + P_{il}^+ P_{kl}^- \equiv \tilde{\underline{H}}_{ik}^{(1)} + \tilde{\underline{\underline{H}}}_{ik}^{(1)}.$$

Операторы Q_i^\pm связывают между собой собственные функции (с одинаковой энергией) $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$, а также $\tilde{H}^{(0)}$ и $\tilde{H}^{(1)}$, а операторы P_{il}^\pm связывают собственные функции $\underline{H}^{(1)}$ и $\underline{\underline{H}}^{(1)}$.

В качестве примера рассмотрим трехмерный кулоновский потенциал притяжения $V^{(0)} = -\alpha/r$, для которого известны спектр $E_N^{(0)} = -\frac{\alpha^2}{2(N+1)^2}$, $N = 0, 1, \dots$ и волновые функции связанных состояний. Тогда оказывается возможным точно определить спектр $E_N^{(1)} = -\frac{\alpha^2}{2(N+2)^2}$ и волновые функции в матричном потенциале $V_{ik}^{(1)} = -\alpha \frac{x_i x_k}{r^3}$, поскольку в данном случае потенциалы $\tilde{V}^{(0)} = \frac{\alpha}{r}$ и $V_{ik}^{(1)} = \alpha \frac{x_i x_k}{r^3}$ не имеют связанных состояний (они имеют отталкивательный характер). Волновые функции в потенциале $V_{ik}^{(1)} = -\alpha \frac{x_i x_k}{r^3}$ явно выражаются через гипергеометрические функции. Эти формулы представляют интерес при исследовании квантовой задачи нескольких тел с кулоновским взаимодействием⁵.

Авторы благодарны М.А.Брауну, И.В.Комарову и М.И.Эйдесу за полезные обсуждения.

Литература

1. Schrödinger E. Proc. Roy. Irish. Acad., 1940, 46A, 9; 1941, 46A, 183.
2. Айнс Э. "Обыкновенные дифференциальные уравнения", 1939, Харьков, стр. 176.
3. Infeld L., Hull T.E. Rev. Mod. Phys., 1951, 23, 21.
4. Matveev V.B. Lett., Math. Phys., 1979, 3, 213, 217.
5. Merkuriev S.P. Acta Phys. Austr. Suppl., 1981, 23, 65.