Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 2, стр. 89 – 92 *25 января 1984 г.*

О РОЖДЕНИИ ЧАСТИЦ В ТУННЕЛИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В.А.Рубаков

Рассматривается вопрос о поведении квантованных полей в процессе туннелирования замкнутой однородной изотропной Вселенной. Показано, что туннелирование Вселенной из режима Фридмана в режим Де Ситтера сопровождается катастрофическим рождением частиц.

В последнее время большое внимание уделяется вопросам, связанным с туннелированием замкнутой Вселенной как целого [1 – 3]. Эта проблема привлекает особый интерес в связи с попытками описания квантового рождения Вселенной из "ничто" (см. [2] и ссылки там). Целью настоящей работы является обсуждение вопроса о поведении квантованных полей в процессе туннельного перехода замкнутой однородной изотропной Вселенной с положительной космологической постоянной из режима Фридмана (или из "ничто") в режим типа Де Ситтера. Мы будем использовать приближение, в котором туннелирование описывается квазиклассически, и пренебрежем обратным влиянием частиц на сам процесс туннелирования. Мы покажем, что по крайней мере в модели массивного скалярного поля с конформной связью рождение частиц при туннелировании из режима Фридмана является катастрофическим, причем вероятность рождения экспоненциально растет с проникновением вглубь классически запрещенной области.

Имея в виду указанные приближения, запишем уравнение Уилера – Де Витта [4], считая несущественными все степени свободы, кроме масштабного фактора R и полей частиц $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\left(\frac{1}{24}\,\frac{\partial^2}{\partial R^2} - 6R^2 + \Lambda R^4 + \pi_T + H_M\,[\,\hat{\varphi}(\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_\varphi(\mathbf{x}):\ R\,]\right)|\,\Phi> = 0 \qquad (1)$$

(в дальнейшем считаем $\Lambda << 1$). Здесь мы положили $\hbar = c = M_{Pl} = 1$, так что все величины измеряются в планковских единицах; мы также ввели в уравнение константу π_T, которая возникает, например, когда Вселенная заполнена идеальным газом с уравнением состояния $p = \rho / 3$ [5] (на классических решениях уравнений Эйнштейна $\pi_T = \rho R^4$). Выбор порядка сомножителей в (1) несущественен в нашем приближении (см. в связи с этим [6]). В уравнении (1) H_M – оператор Гамильтона частиц в конформном времени; в случае массивного скалярного поля с конформной связью

$$H_M = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{l} H_{klm} \,, \qquad (2)$$

где H_{klm} – гамильтониан для моды с квантовыми числами k, l, m:

$$H_{klm} = \frac{1}{2}\hat{\pi}^2_{klm} + \frac{1}{2}(k^2 + \mu^2 R^2)\hat{\varphi}^2_{klm}\,; \quad [\hat{\pi}_{klm}, \hat{\varphi}_{k'l'm'}] = -i\delta_{kk'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\,.$$

Вектор состояния Вселенной $|\Phi(R)>$ при каждом фиксированном R является вектором из гильбертова пространства состояний частиц (например, можно считать $|\Phi>$ фоковским столбцом с элементами, зависящими от R).

В пренебрежении энергией частиц уравнение (1) совпадает с уравнением Шредингера для "частицы" с "энергией" π_T в "потенциале" $V(R) = 6R^2 - \Lambda R^4$. При $1 << \pi_T << \Lambda^{-1}$ имеется возможность туннелирования Вселенной из классически доступной области малых R (режим Фридмана) в область больших R (режим Де Ситтера)[3]. При $\pi_T \lesssim 1$ область малых R соответствует Вселенной с планковским радиусом, и происходит туннелирование из этого состояния ("ничто", "мини-Вселенной"[4, 6] "квантового пуфа"[7]) в расширяющуюся Вселенную типа Де Ситтера[1)].

Если H_M не зависит от R, то уравнение (1) можно решить методом разделения переменных. Ясно, что при фиксированном π_T и большой конформной энергии частиц (собственном значении гамильтониана H_M) вероятность проникновения под барьер экспоненциально усилена по сравнению с туннелированием с малой конформной энергией[2)]. Если H_M зависит от R, то возможно рождение частиц (переходы на возбужденные уровни H_M) в процессе туннелирования, которое затем приводит к экспоненциальному увеличению волновой функции под барьером. Таким образом, рождение частиц является процессом, выгодным для туннелирования. Физическая причина состоит в том, что увеличение энергии частиц означает одновременно увеличение по модулю отрицательной энергии гравитационного поля (полная энергия замкнутой Вселенной равна нулю), что и ведет к более вероятному проникновению под барьер.

Чтобы найти уравнение квантовой теории поля в туннелирующей Вселенной, поступим по аналогии с выводом[8] уравнения Томонага – Швингера для вектора состояния материи во внешнем классическом гравитационном поле из уравнения Уилера – Де Витта. Запишем вектор состояния в виде $|\Phi(R)> = e^{-S(R)}|\Psi(R)>$, где S удовлетворяет уравнению $(dS/dR)^2 = 24(V - \pi_T)$. В описанном выше приближении получим

$$-\frac{1}{12}\frac{dS}{dR}\frac{\partial|\Psi>}{\partial R} + H_M|\Psi> = 0.$$

Введем "евклидово конформное время", перейдя от переменной R к переменной τ, такой, что $12(dR/d\tau) = (dS/dR)$. Имеем в результате

$$\frac{\partial|\Psi>}{\partial\tau} = H_M|\Psi>. \qquad (3)$$

---

1) Проблема рождения Вселенной из "ничто" в этой модели рассматривалась также А.А.Старобинским.

2) Отсюда следует, что если рождение частиц происходило при классическом расширении, и непосредственно перед барьером состояние Вселенной было суперпозицией состояний с различной энергией материи, а соответствующие амплитуды убывали степенным образом с энергией, то наиболее вероятным состоянием за барьером будет классическое расширение, начинающееся с точки максимума "потенциала" $V(R)$, а амплитуда прохождения будет степенным, а не экспоненциальным, образом мала.

Уравнение (3) является нашим основным уравнением; оно справедливо, если полная энергия частиц значительно меньше $V(R)$. Следующий из (3) экспоненциальный рост $|\Psi(\tau)>$ при ненулевой конформной энергии ~~соответствует увеличению вероятности туннелирования~~, обсуждавшейся выше [3].

Обсудим решения уравнения (3) в модели (2) в случае туннелирования из режима Фридмана. Поскольку моды с различными квантовыми числами ведут себя независимо $(|\Psi> = \prod_{k,l,m} |\Psi^{klm}(\tau)>)$, достаточно решить уравнение (3) для фиксированных k, l, m. Разложим $|\Psi^{klm}(\tau)>$ по собственным состояниям мгновенного гамильтониана $H_{klm}(\tau)$: $|\Psi^{klm}> = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} e^{\int \omega_k d\tau/2} |\Psi_n^{klm}>$ (индексы l, m у $C_n^{(k)}$ опускаем). Для n-частичных амплитуд $C_n^{(k)}$ имеем уравнения

$$\frac{\partial C_n^{(k)}}{\partial \tau} = n\omega_k C_n^{(k)} + \sum_{n' \neq n} \frac{C_{n'}^{(k)}}{\omega_k(n-n')} < \Psi_n^{klm}(\tau) | \frac{\partial H_{klm}}{\partial \tau} | \Psi_{n'}^{klm}(\tau)>, \tag{4}$$

где $\omega_k^2 = k^2 + \mu^2 R^2$. Пусть, например, непосредственно перед барьером имелось вакуумное состояние: $C_n^{(k)}(\tau = 0) = \delta_{n0}$. Решая уравнение (4) итерациями в пренебрежении уничтожением частиц (можно показать, что оно законно), получаем

$$C_{2n}(\tau) = \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \left[e^{2\int_0^\tau \omega_k d\tau'} \int_0^\tau e^{-2\int_0^{\tau_1} \omega_k d\tau''} \frac{\mu^2 R(\tau_1)}{2\omega_k^2(\tau_1)} \frac{dR(\tau_1)}{d\tau_1} d\tau_1 \right]^n, \tag{5}$$

так что все многочастичные амплитуды становятся порядка единицы при

$$\tau \approx \sqrt{\frac{2(R - R_1)}{R_1}} = \frac{1}{\epsilon_k R_1} \ln \frac{\epsilon_k^2 R_1}{\mu}, \quad \epsilon_k^2 = \mu^2 + k^2 R_1^{-2}, \tag{6}$$

где R_1 – максимальный радиус классического фридмановского расширения (предполагается, что $R_1 >> \mu^{-1}$).

Из (5), (6) видно, что рождение частиц происходит тем интенсивнее, чем больше волновое число k, и для больших k оно становится катастрофическим уже в самом начале туннельного перехода. Поэтому пренебрежение обратным влиянием частиц на процесс перехода незаконно. Учет обратного влияния должен привести, по-видимому, к тому, что классическое расширение в режиме Де Ситтера начинается с точки максимума "потенциала" $V(R)$, при этом конформная энергия рожденных частиц при $R = R_{max}$ равна $V(R_{max}) - \pi_T$. Мы ожидаем также, что обратное влияние увеличит амплитуду перехода: вместо ее подавления фактором $\exp(-\mathrm{const}/\Lambda)$ [3] можно ожидать степенной зависимости амплитуды от Λ^{-1}. Рождение частиц с ненулевыми k, l, m может привести также к неоднородности и анизотропии Вселенной в момент начала стадии Де Ситтера.

Применение описанного метода решения уравнения (3) к случаю туннелирования из "ничто" приводит к аналогичным результатам. Однако, в этом случае определение вакуума при малых R нуждается в уточнении.

---

[3] Нетрудно обобщить уравнение (3) на случай иного (не конформного) выбора времени. Отметим, что в случае негравитационного туннелирования в теории поля [9] можно показать, что аналогичное уравнение имеет отрицательный знак в правой части, и катастрофического рождения частиц не происходит.

В данной работе мы не касались вопроса о перенормировках, которые, по-видимому, необходимы при построении последовательной квантовой теории поля в туннелирующей Вселенной. Эта проблема требует дальнейших исследований.

В заключение отметим, что описанная выше техника может оказаться полезной при изучении рождения частиц в других моделях туннелирующей Вселенной. По-видимому, эффект катастрофического рождения частиц является довольно общим свойством процессов туннелирования в квантовсй гравитации.

Автор благодарен В.А.Березину, В.А.Кузьмину, В.А.Матвееву, А.Н.Тавхелидзе, И.И.Ткачеву и М.Е.Шапошникову за многочисленные полезные дискуссии и Л.П.Грищуку, Я.Б.Зельдовичу, М.В.Сажину и А.А.Старобинскому за обсуждение результатов.

Литература

1. *Hawking S.W.*, *Moss I.G.* Phys. Lett., 1982, **110B**, 35; *Mottola E., Lapedes A.* Phys. Rev., 1983, **D27**, 2285.
2. *Грищук Л.П., Зельдович Я.Б.* Кн. "Труды 2-го Международного семинара по квантовой гравитации Москва, 1981" М., ИЯИ АН СССР, 1982; *Vilenkin A.* Phys. Lett., 1982, **117B**, 25.
3. *Hartle J., Hawking S.W.* "Wave function of the Universe", preprint, 1983.
4. *De Witt B.S.* Phys. Rev., 1967, **162**, 1113.
5. *Лапчинский В.Г., Рубаков В.А.* ТМФ, 1977, **33**, 364.
6. *Mal'tsev V.K., Markov M.A.* INR preprint P-0160, 1980; *Мальцев В.К.* ТМФ, 1981, **47**, 177.
7. *Misner C.W.* In "Magic Without Magic", ed J. Klauder, S.-Francisco, 1972.
8. *Lapchinsky V.G., Rubakov V.A.* Acta Phys. Polonica, 1979, **B10**, 1041.
9. *Волошин М.Б., Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б.* ЯФ, 1974, **20**, 1229; *Coleman S.* Phys. Rev., 1977, **D15**, 2929.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 декабря 1983 г.