О ДИСПЕРСИИ ЗВУКА В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

И.М.Халатников, Д.М.Черникова

При малых частотах ($\omega\tau \ll 1$, ω - частота звука, τ - некоторые характерные времена) исследование вопроса о поглощении звука производится с помощью гидродинамических уравнений [1] . Вопрос о распространении звука при немалых значениях частоты ($\omega\tau \gtrsim 1$) рассматривается с помощью кинетических уравнений, которые совместно с уравнениями непрерывности массы и сверхтекучей жидкости представляют полную систему уравнений, описывающих распространение звука в гелии II.

Этому вопросу посвящена работа [2]. Благоприятная ситуация с установлением равновесия по энергиям в газе возбуждений позволяет решить задачу по существу точно. Дело в том, что эффективное сечение рассеяния ротонов ротонами довольно велико и поэтому практически в ротонном газе всегда имеется локальное равновесие, т.е. ротонный газ можно описывать квазиравновесной функцией распределения с изменяющимися от точки к точке значениями температуры T_p и относительной скорости $\vec{v}_{np} - \vec{v}_s$ ротонного газа. Рассеяние фонона фононом не сопровождается изменением направлений импульсов сталкивающихся фононов и аномально велико для столкновений фононов под малыми углами. Этот процесс быстрее всех других процессов, происходящих с фононами, и приводит к тому, что для фононов, движущихся в заданном направлении, всегда имеется энергетическое равновесие. Кроме того, пятифононный процесс для фононов, сталкивающихся под малыми углами при $T < 1{,}2^{\circ}K$, происходит также быстрее процесса рассеяния фононов ротоном, и поэтому равновесие по числу фононов успевает устанавливаться. Таким образом, фононы, движущиеся в заданном направлении, могут быть описаны квазиравновесной функцией распределения, зависящей при $T < 1{,}2^{\circ}K$ от температуры $T_{ф}$ и относительной скорости $\vec{v}_{nф} - \vec{v}_s$ фононов в этом направлении. При $T \geq 1{,}2^{\circ}K$ эта функция распределения зависит еще и от некоторого химического потенциала, являющегося также функцией направления фононов.

Относительно самым медленным процессом является рассеяние фононов ротонами. Благодаря медленности этого процесса установление энергетического равновесия между ротонным и фононным газами затруднено, в то время как в каждом из них в отдельности оно имеется. Это обстоятельство приводит к возникновению в гидродинамическом приближении некоторой второй вязкости, а в общем случае к поглощению и дисперсии первого и второго звуков.

Эффекты дисперсии и поглощения первого звука пропорциональны малой величине $\rho_{nф}/\rho$ ($\rho_{nф}$ -фононная часть нормальной плотности). Это позволяет выделить из упомянутой выше системы уравнений, описывающих распространение звуковых колебаний в гелии II , две пары уравнений, одна из которых описывает распространение первого, другая - второго звука. Условие совместности каждой из пар уравнений дают два дисперсионных уравнения, определяющие скорости распространения и коэффициенты поглощения соответствующих звуков. При этом в наиболее интересной области температур (ниже I,2°K) теория содержит два характерных времени $\tau_{\varphi\rho}$ и $\tau_{\varphi\varphi}$, связанные с рассеянием фонона ротоном и рассеянием фонона фононом на большие углы, которые точно вычисляются. Область дисперсии первого звука наступает для частот, удовлетворяющих условию $\omega\tau_{\varphi\rho}$, $\omega\tau_{\varphi\varphi} \sim 1$. Для наблюдения дисперсии второго звука должно выполняться более либеральное условие $\omega\tau_{\varphi\rho} \sim u_2/u_1$ (u_1 - скорость первого, u_2-скорость второго звука, $u_2/u_1 \lessapprox 1$). В пределе $\omega\tau_{\varphi\rho} \gg u_2/u_1$ второй звук будет, не затухая, распространяться по ротонному газу со скоростью $u_{2\infty} = \left\{(\rho_{s\rho}/\rho_{n\rho})\boxed{(\sigma_\rho^2/\partial\sigma_\rho)}\right\}^{1/2}$, сильно отличающейся от равновесной $u_{20} = \left\{(\rho_s/\rho)(\sigma^2/(\partial\sigma/\partial T)_\rho)\right\}^{1/2}$ (ρ_n -плотность нормальной компоненты, $\sigma = S/\rho$,

$(\sigma_\rho^2/(\partial\sigma_\rho/\partial T)_\rho)$

S - энтропия, индексом ρ отмечены ротонные части соответствующих величин).

Представляет интерес сравнить результаты, полученные в [2], с последними измерениями Джефферса и Уитни коэффициента поглощения первого звука [3]. Согласно [2] коэффициент поглощения первого звука в области температур, меньших I,2°K, равен

$$\alpha_1 = 1/2\,\frac{\omega}{c}\,\frac{\rho_{n\varphi}}{\rho}\,Im\,(\varphi), \qquad (I)$$

где

$$\varphi = z_{\varphi\rho} - 3\,\frac{u^2 \ln a + [2u z_{\varphi\rho} + z_{\varphi\rho}^2(1-\beta(1-z_{\varphi\rho})) + 3u^2(1-z_{\varphi\rho})]}{2+[1-z_{\varphi\varphi}+(1-\beta)(1-z_{\varphi\rho})]\ln a + 3(1-z_{\varphi\varphi})[1-\beta(1-z_{\varphi\rho})][-2+(z_{\varphi\rho}+z_{\varphi\varphi}-1)\ln a]} \times$$

$$\times\,\frac{[-2+(z_{\varphi\rho}+z_{\varphi\varphi}-1)\ln a]}{2+[1-z_{\varphi\varphi}+(1-\beta)(1-z_{\varphi\rho})]\ln a + 3(1-z_{\varphi\varphi})[1-\beta(1-z_{\varphi\rho})][-2+(z_{\varphi\rho}+z_{\varphi\varphi}-1)\ln a]} \qquad (2)$$

$$\left(u = \frac{\rho}{c}\,\frac{\partial c}{\partial \rho},\ \beta = \frac{3kT}{\mu c^2},\quad z_{\varphi\rho} = 1 - \frac{1}{i\omega\tau_{\varphi\rho}},\ z_{\varphi\varphi} = 1 - \frac{1}{i\omega\tau_{\varphi\varphi}},\ a = \frac{z_{\varphi\rho}+z_{\varphi\varphi}}{z_{\varphi\rho}+z_{\varphi\varphi}-2}\right).$$

В выражении (2) при температурах, меньших 0,6°К, следует положить $\tau_{\varphi\rho} = 1$, а при температурах, бо́льших 0,9°К, – $\tau_{\varphi\varphi} = 1$. В области больших ($\omega\tau_{\varphi\rho}$, $\omega\tau_{\varphi\varphi} \gg 1$) и малых частот ($\omega\tau_{\varphi\rho}, \omega\tau_{\varphi\varphi} \ll 1$) удобнее пользоваться предельными выражениями (I) и (2):

$$(\omega\tau_{\varphi\rho}, \omega\tau_{\varphi\varphi} \gg 1) \qquad \alpha_1 = 3/8\pi \frac{\omega}{c} (u+1)^2 \frac{\rho_{n\varphi}}{\rho}; \tag{3}$$

$$(\omega\tau_{\varphi\rho}, \omega\tau_{\varphi\varphi} \ll 1) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{3}{10} \dfrac{\omega^2\tau_{\varphi\rho}}{c} \dfrac{\rho_{n\varphi}}{\rho} (u+1)^2 \quad (T<0{,}6^\circ K), & (4) \\ \alpha_1 = \dfrac{\omega^2\tau_{\varphi\rho}}{c} \dfrac{\rho_{n\varphi}}{\rho} \left\{ \dfrac{2/15}{1+(\tau_{\varphi\rho}/\tau_{\varphi\varphi})} + \dfrac{(3u+1)^2}{6\rho} \right\} & (5) \end{cases}$$

$$(T \geq 0{,}6^\circ K).$$

При температурах, бо́льших 0,9°К, $\tau_{\varphi\rho}/\tau_{\varphi\varphi} \ll 1$, и этим членом в знаменателе (5) можно пренебречь.

В области высоких температур ($T \geq 1{,}2^\circ K$) и малых частот $\omega\tau_{\varphi\rho} \ll 1$ (этому неравенству в случае первого звука удовлетворяют практически все возможные для $T \geq 1{,}2^\circ K$ частоты),

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2\tilde{\tau}_{\varphi\rho}}{c} \left\{ \frac{2}{15} + \frac{(3u+1)^2}{6\tilde{\rho}} \right\} \frac{\rho_{n\varphi}}{\rho}, \tag{6}$$

Как

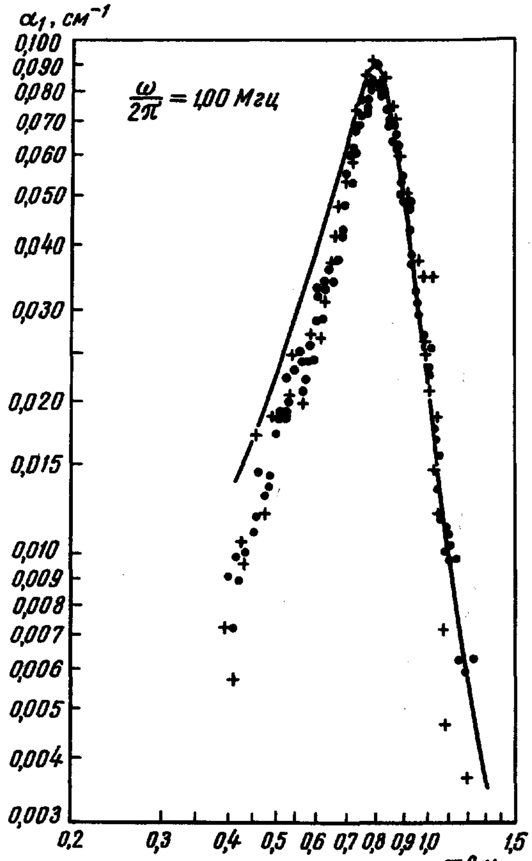
где

$$\tilde{\tau}_{\varphi\rho} = \tau_{\varphi\rho} \left[1 + \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{216} - 1\right)^2}{\frac{\pi^4}{216}\left(\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\tau_{3\to2}} + \frac{1}{56}\frac{\pi^4}{216}\right)} \right]^{-1},$$

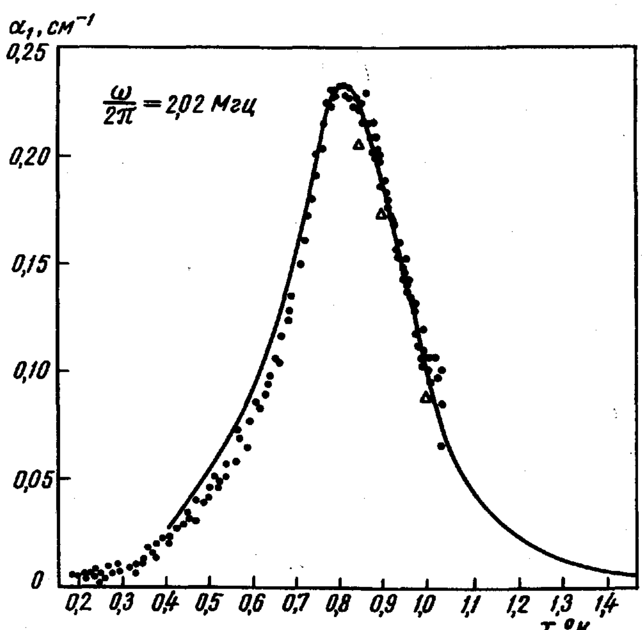
$$\frac{1}{\tilde{\rho}} = \left[\frac{1}{\rho} + \frac{\tau_{3\to2}}{\tau_{\varphi\rho}} \left(\frac{27}{\pi^4} - \frac{1}{9} \right) \right] \left[1 + \frac{\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{216} - 1\right)^2}{\frac{\pi^4}{216}\left(\frac{\tau_{\varphi\rho}}{\tau_{3\to2}} + \frac{1}{56}\frac{\pi^4}{216}\right)} \right]^{-1}$$

($\tau_{3\to2}$ – время, характеризующее пятифононный процесс рассеяния, которое в этом случае становится сравнимым со временем $\tau_{\varphi\rho}$).

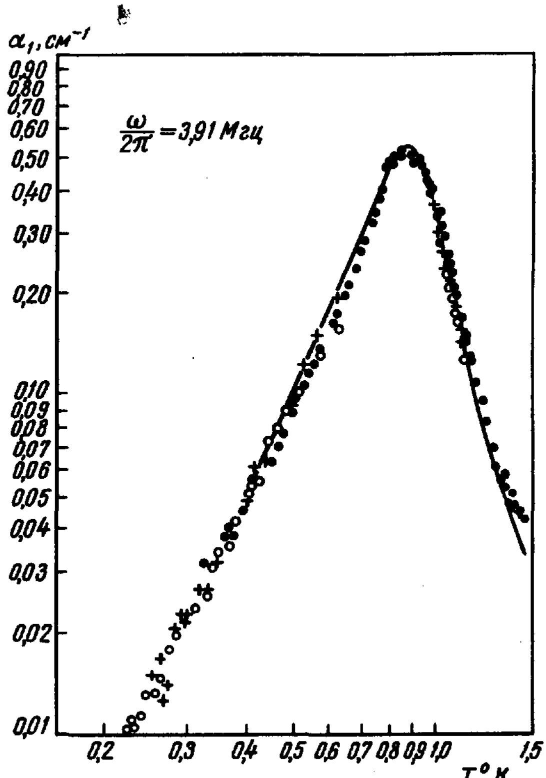
Вычисленные по формулам (I)–(6) температурные зависимости коэффициента поглощения первого звука для частот I, 2,02, 3,91, 6,08 Мгц представлены сплошными кривыми на рисунках а, б, в и г. Для сравнения там же приведены экспериментальные данные Джефферсона, Уитни и Чейза [3]. Измеренные этими авторами значения α_1 совпадают с теоретическими значениями в широком интервале температур и частот.



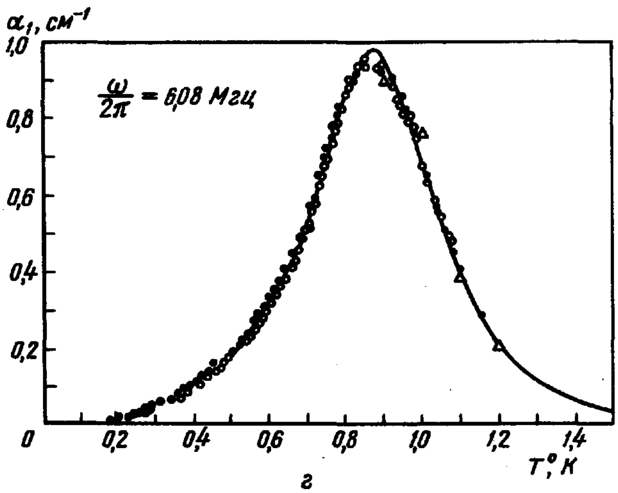
а



б



в



г

Температурная зависимость коэффициента поглощения первого звука для частот: а – I, б – 2,02, в – 3,9I, г – 6,08 Мгц (о,●,+ – данные Джефферса и Уитни; △,▲ – данные Чейза соответственно для частот 2,00 и 6,00 Мгц)

Заметим, что при выводе формул (I)-(6) мы полагали всюду энергию фонона равной $\varepsilon = cp$. При очень больших частотах, $\omega\tau_{\varphi p}$, $\omega\tau_{\varphi\varphi} \gg \left[3\gamma\left(2\pi\frac{kT}{c}\right)^2\frac{B_3}{B_2}\right]^{-1}$ (B_2 и B_3 -числа Бернулли) членом, содержащим γp^2 в выражении для ε ($\varepsilon = cp(1-\gamma p^2)$), вообще говоря, пренебречь нельзя. Однако хорошее совпадение теоретических значений, полученных по формуле (3), с экспериментальными [3] свидетельствует о том, что γ, по-видимому, много меньше величины $3 \cdot 10^{37}$, получаемой из грубой интерполяции энергетического спектра [4].

Произведенное в [5] исследование вопроса о поглощении первого звука при больших частотах базировалось на предположении об относительной медленности процессов установления равновесия по числу фононов и ротонов. Такая ситуация в сверхтекучем гелии в наиболее интересной области температур (ниже $1{,}2^{\circ}$K) не осуществляется и имеет место лишь при более высоких температурах.

В заключение авторы выражают благодарность Р.Г.Минцу, В.Н.Сазонову и Д.Семизу за помощь, оказанную при выполнении численных расчетов.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
9 ноября 1965 г.

Литература

[1] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 23, 21, 1952.

[2] И.М.Халатников, Д.М.Черникова. ЖЭТФ, 49, № 12, 1957, 1965.
50, № 2, 1966 (в печати).

[3] W.A.Jeffers, W.M.Whitney. Phys. Rev., 139, 1082, 1965;
C.E.Chase, Ph.D.thesis, Cambridge University, 1954 (unpublished).

[4] Л.Д.Ландау, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 19, 637, 709, 1949.

[5] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 20, 243, 1950.