Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 4, стр. 180 – 183 *25 февраля 1984 г.*

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ $SU(N)$ – ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

П.Б.Вигман

Построено точное решение $SU(N)$-главного кирального поля в двух измерениях, в рамках которого определены: спектр частиц, S-матрица и средние значения киральных токов во внешних полях.

1. Низкоэнергетическая часть взаимодействия голдстоуновских частиц, возникающих при спонтанном нарушении симметрии, полностью определяется группой симметрии G и описывается $G \otimes G$ -инвариантной нелинейной σ-моделью:

$$S = \frac{1}{2\lambda_0} \int d^2x \operatorname{tr} (g^{-1} \partial_\mu g)^2 ; \tag{1}$$

где так называемое главное киральное поле, $g(x)$ – элемент группы G.

Хорошо известно, что в двумерном пространстве эффективное взаимодействие неабелевых голдстоуновских полей неограниченно растет при уменьшении масштаба энергии [1]. Вследствие этого, низкоэнергетические свойства системы, в частности, вопрос о спектре частиц, остаются за пределами применимости стандартных методов квантовой теории поля. С другой стороны известно, что двумерное киральное поле обладает бесконечной серией законов сохранения [2,3], факторизованной теорией рассеяния и, следовательно, вполне интегрируема.

В настоящем сообщении кратко изложены результаты точного решения $SU(N)$-главного кирального поля, основанное на идее высказанной А.М.Поляковым несколько лет тому назад (см., например, [4]). В частности, будет доказано, что неабелевы голдстоуновские бозоны массивны и образуют базис кольца представлений группы $G \otimes G$ с типичным для $G = SU(N)$ спектром:

$$m_k = m \frac{\sin((\pi k)/N)}{\sin(\pi/N)} ; \qquad k = 1 \dots N-1. \tag{2}$$

2. Метод, которым мы будем пользоваться, подробно изложен в [5], где была решена наиболее простая $SU(2)$ – киральная модель. Он основан на эквивалентности кирального поля и $(1 + 1)$-модели взаимодействующих фермионов. Последняя также интегрируема, однако, применение к ней метода Bethe-Ansatz, в известном смысле, традиционно.

Пусть $\psi \equiv \psi_f^\alpha$, $(\alpha = 1 \dots N;\ f = 1 \dots N_f)$ – фермионное поле образующее "цветной" мультиплет и вспомогательный "флэйворный" мультиплет, $j_\mu^a \equiv \sum_f \bar\psi_f \gamma_\mu \tau^a \psi_f$, а τ^a – генераторы $SU(N)$. В [5] доказано, что при $N_f \to \infty$ модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar\psi \hat\partial \psi + \lambda_0 j_\mu^a j_a^\mu , \tag{3}$$

эквивалентна главному киральному полю.

Напомним кратко идею доказательства. Вводя промежуточное векторное поле: $\lambda_0 j_\mu^a j_a^\mu \to A_\mu^a j_a^\mu - \frac{1}{2\lambda_0} A_\mu^a A_a^\mu$, и, после интегрирования по фермионным полям, получим эффективное действие

$$S = - N_f W\{A\} - \int d^2x \frac{1}{2\lambda_0} \operatorname{tr}(A_\mu A^\mu) ;$$

$$W\{A\} = i \ln \operatorname{Det}(i\hat\partial + \hat A) ; \qquad \hat A = A_a^\mu \tau^a \gamma_\mu . \tag{4}$$

В [5] показано, что калибровочно-инвариантный функционал $W\{A\}$ является двумерной версией действия Весса – Зумино. В евклидовом пространстве

$$16\pi W\{A\} = -\operatorname{tr}\left\{\int d^2x\,(A_\mu A^\mu) + \frac{2}{3} i \int d^3\xi\, A_\alpha A_\beta A_\gamma\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\right\}. \tag{5}$$

Здесь $A_\alpha(\xi) = a^{-1}\partial_\alpha a$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ определено во внутренности трехмерного шара Q, границей которого является стереографическая проекция плоскости x с условием $a = g_+ g_-^{-1}$; $A_\pm = A_1 \pm iA_0 = g_\pm^{-1}\partial_\pm g_\pm$ на границе. Из (4), (5), в частности, следует, что при $N_f \to \infty$ флуктуации A_μ подавлены, и при $N_f = \infty$ поле A_μ является чисто калибровочным: $g_+ = g_- \equiv g$, $A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g$. Отсюда следует, что при $N_f = \infty$ действия (1) и (4) совпадают. Отметим, что при конечном N_f фермионная модель обладает только одной (правой) $SU(N)$-инвариантностью. Левая группа симметрии восстанавливается только при $N_f = \infty$.

3. Фермионная модель (3) является вполне интегрируемой при конечном N_f. Опуская подробности решения приведем иерархию уравнений Бете, возникающих при удовлетворении периодических граничных условий для Бетевской волновой функции [1)]: Собственное состояние $2\mathcal{N}$-частиц, принадлежащее к представлению симметрической группы со старшим весом $[1^{2\mathcal{N}-M_1}, 2^{M_1-M_2}, \ldots, N^{M_{N-1}}]$ описывается быстротами $\{k_1^{(\pm)} \ldots k_{\mathcal{N}}^{(\pm)}\}$; $\{\lambda_1^{(j)} \ldots \lambda_{M_j}^{(j)}\}$; $(j = 1 \ldots N-1)$ удовлетворяющих уравнениям:

$$\exp(ik_i^{(\sigma)}L) = \prod_{\alpha=1}^{M_1} e_{N_f}(\sigma/\lambda_0 - \lambda_\alpha^{(1)});\quad \sigma = \pm 1;\quad i = 1 \ldots \mathcal{N},$$

$$\prod_{\sigma=\pm 1} [e_{N_f}(\sigma/\lambda_0 - \lambda_\alpha^{(1)})]^{\mathcal{N}} \prod_{\beta=1}^{M_2} e_1(\lambda_\beta^{(2)} - \lambda_\alpha^{(1)}) = \prod_{\beta=1}^{M_1} (\lambda_\beta^{(1)} - \lambda_\alpha^{(1)}); \tag{6}$$

$$\prod_{\tau=\pm 1} \prod_{\beta=1}^{M_{j+\tau}} e_1(\lambda_\beta^{(j+\tau)} - \lambda_\alpha^{(j)}) = \prod_{\beta=1}^{M_j} e_2(\lambda_\beta^{(j)} - \lambda_\alpha^{(j)});\quad \alpha = 1 \ldots M_j;\quad j = 1 \ldots N-1.$$

где $e_n(x) = (x - in/2)/(x + in/2)$. Энергия состояния – $E = \Sigma(k_i^{(+)} - k_i^{(-)})$.

4. В термодинамическом пределе решения уравнений (6) группируются в комплексы порядка $n = 1 \ldots \infty$: $\lambda_{\alpha;k}^{(j)} = \lambda_\alpha^{(j)} + i\left(\frac{n-1}{2} - k\right)$; $k = 1 \ldots n$. Любое состояние определяется распределениями частиц и дырок в зонах различных комплексов: пусть $\rho^j(\lambda)$ и $\rho^j(\lambda)$– распределения частиц и дырок в зоне N_f-комплексов, отвечающих j-ому столбцу схемы Юнга; $l_n^j(\lambda)$, $\tilde{l}_n^j(\lambda)$ и $r_m^j(\lambda)$, $\tilde{r}_m^j(\lambda)$ – тоже для $n = 1 \ldots N_f - 1$ и $m = N_f + 1 \ldots \infty$ комплексов. После необходимых вычислений получим спектральные уравнения связывающие распределения частиц и дырок. Приведем их непосредственно для $N_f = \infty$:

$$\rho^j(\lambda) + R_{jk} * \tilde{\rho}^k(\lambda) + a_m * (r_m^j + l_m^j)(\lambda) = m_j \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\lambda}{N}\right);$$

$$l_n^j(\lambda) + A^{nm} * C_{jk}^{(N)} * l_m^k(\lambda) = a_n * \tilde{\rho}^j(\lambda);$$

$$r_n^j(\lambda) + A^{nm} * C_{jk}^{(N)} * r_m^k(\lambda) = a_n * \tilde{\rho}^j(\lambda); \tag{7}$$

$k, j = 1 \ldots N-1$; $n, m = 1 \ldots \infty$.

---

1) Решение фермионной модели требует аккуратной регуляризации в области больших энергий. Наиболее последовательный способ, состоящий в решении нерелятивистской версии модели (3), подробно описан в [6].

Энергия состояния и числа $q_j = M_{j+1} + M_{j-1} - 2M_j$, характеризующие симметрию состояния суть : $\mathcal{E} \equiv (L/N^2)\cdot E = \text{const} + \int d\lambda \sum_j m_j \,\mathrm{ch}^{2\pi}/_N \lambda \tilde{\rho}^j(\lambda)$; $q_j = \int \tilde{\rho}^j(\lambda) d\lambda$, (8)

а m_k даются (2). Здесь использованы символ свертки (*) и интегральные операторы, фурье-образы которых имеют вид:

$$R_{jk}(\omega) = \mathrm{th}\frac{|\omega|}{2} A_{jk}^{(N)} \quad ; \quad A_{jk}^{(N)} = 2\mathrm{cth}\frac{\omega}{2} \frac{\mathrm{sh}[(N - \max(jk))\,\omega/2]\,\mathrm{sh}[\min(j,k)\,\omega/2]}{\mathrm{sh}\frac{N\omega}{2}},$$

$$A^{nm} = A_{nm}^{(\infty)}; \; n, \; m = 1 \dots \infty;$$

$$C_{jk}^{(N)} = (A^{(N)})_{jk}^{-1} = \delta_{jk} - \frac{1}{2\mathrm{ch}\frac{\omega}{2}} (\delta_{j,k+1} + \delta_{j,k-1}); \quad j, \; k = 1 \dots N-1. \tag{9}$$

$$a_n(\omega) = e^{-|\omega| n/2}.$$

5. Спектральные уравнения содержат всю информацию о спектре частиц, амплитудах рассеяния и термодинамических свойствах. В данном случае из них следует:

1) основное состояние системы сформировано комплексами порядка N_f ;

2) распределения $\tilde{\rho}^j$, l_n^j, r_n^j – описывают возбужденные состояния – массивные физические частицы со спектром масс (2), которые являются изотопическими мультиплетами группы $SU(N) \otimes SU(N)$. Мультиплеты преобразуются как антисимметрические $SU(N) \otimes$ $\otimes$ $SU(N)$-тензора ранга $j = 1 \dots N-1$. В силу того, что j -ое представление эквивалентно $N-j$ -ому сопряженному, j -ая и $N-j$ -ая частицы связаны кроссинг-преобразованием;

3) j -ая частица является связанным состоянием j фундаментальных частиц. Фундаментальные частицы принадлежат векторному представлению. В частности фундаментальная античастица может рассматриваться как связанное состояние $N-1$ частиц.

4) Двухчастичная факторизованная S-матрица фундаментальных частиц имеет вид:

$$\mathbf{S}_{11}(\theta) = \exp(i\Phi(\theta))\,[\,\sigma_L(\theta) \otimes \sigma_R(\theta)\,], \tag{10}$$

где $\theta = \ln \dfrac{s - 2m^2 + \sqrt{s^2 - 2sm^2}}{2m^2}$ – разность быстрот рассеивающихся частиц,

$$\sigma_{L(R)} = P_{L(R)}^+ + P_{L(R)}^- \frac{\theta + \frac{2\pi i}{N}}{\theta - \frac{2\pi i}{N}} \quad ; \quad \Phi(\theta) = \int \frac{d\omega}{\omega} e^{-i\frac{\theta N}{2\pi}\omega} (R_{11}(\omega) - 1),$$

а $P_{L(R)}^{\pm}$ – проекторы на соответственно симметрический (антисимметрический) левый (правый) канал рассеяния. Амплитуды рассеяния остальных частиц получаются путем "слияния"[7] фундаментальных.

Отметим неожиданную связь между киральным полем и моделью Гросса – Невье [8] :

$$\mathbf{S}_{11}(\theta) = [S^{GN}(\theta) \otimes S^{GN}(\theta)] \frac{\mathrm{sh}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{2\pi i}{N}\right)}{\mathrm{sh}\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{2\pi i}{N}\right)}; \tag{11}$$

где S^{GN} – S- матрица модели Гросса – Невье [8].

S-матрица [10] является минимальной унитарной, аналитической, релятивистской, факторизованной $SU(N) \otimes SU(N)$- инвариантной S-матрицей, и найдена в [9] в рамках метода факторизованного бутстрапа [10]. Там же приведены амплитуды рассеяния связанных состояний.

6. Спектральные уравнения позволяют изучить зависимость энергии основного состояния кирального поля от внешних полей. Добавим к действию (1) член $h_j L_0^j$ или $h_j \bar{\psi} \gamma_0 \hat{H}^j \psi$ к фермионному лагранжиану (3), где $L_0^j = \mathrm{tr}\,(g^{-1} \partial_0 g \hat{H}^j)$ – Нетеровский ток, а $\hat{H}^j = \mathrm{diag}\,(0 \ldots 1 - 1 \ldots 0)$ образуют базис подалгебры Картана. Тогда $\mathcal{E}\,(h_j) = \min\{\mathcal{E}\,(q_j) - \sum_j h_j \int \tilde{\rho}^j(\lambda)\, d\lambda\}$ Введем функции $\epsilon_j^{(\pm)}(\lambda)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\epsilon_j^{(-)}(\lambda) + R_{jk} * \epsilon_k^{(+)}(\lambda) = h_j - m_j \mathrm{ch}\left(\frac{2\pi}{N}\lambda\right) \quad ; \quad j = 1 \ldots N-1; \tag{12}$$

Можно показать, что при условии, что $\epsilon_j^{(+)} \geqslant 0$; $\epsilon_j^{(-)} = 0$ при $|\lambda| \leqslant \lambda_j^{(F)}$, а $\epsilon_j^{(-)} \leqslant 0$; $\epsilon_j^{(+)} = 0$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_j^{(F)}$

$$\mathcal{E}(h_j) = \mathcal{E}\,(0) + \sum_j \int m_j \epsilon_j^{(+)}(\lambda)\, \mathrm{ch}\,\frac{2\pi\lambda}{N}\, d\lambda\,; \tag{13}$$

Уравнение (13) и условия $\epsilon_j^{(\pm)}(\pm \lambda_j^{(F)}) = 0$ однозначно определяют $\lambda_j^{(F)}$ и $\mathcal{E}(h_j)$. Они легко исследуются в предельных случаях. Пусть $h_j = h\,\delta_{jk}$; $J_k \equiv \langle L_0^k \rangle = -\dfrac{\partial \mathcal{E}(h)}{\partial h}$.

Тогда, при $0 < h - m_k \ll m_k$, что соответствует порогу рождения массивной частицы. При $h \gg m_k$ средний ток может быть вычислен суммированием главных логарифмов теории возмущения. В двухпетлевом приближении имеем: $J \backsim z^{-1} + O(z)$, где $z^{-1} + \frac{1}{2} N \ln N z = N \ln {}^{h}/_{m}$. Этот же результат может быть получен из уравнений (12, 13).

7. Особый интерес представляет предел $N = \infty$, в котором киральное поле описывается суммой планарных диаграмм. В этом пределе S-матрица имеет удивительно простой вид:

$$\mathrm{S}_{11}^{(A_1 A_2 \to A_1' A_2')}(\theta) = (1 + O(N^{-2}))\left\{ I_R \otimes I_L + (I_L \otimes P_R + P_L \otimes I_R)\left(-\frac{2\pi i}{N\theta}\right) + \right.$$
$$\left. + P_R \otimes P_L \left(\frac{2\pi i}{N\theta}\right)^2 \right\},$$

где $A_i = (l_i, r_i)$; $P_R = \delta_{r_1 r_2'} \delta_{r_2 r_1'}$; $I_R = \delta_{r_1 r_1'} \delta_{r_2 r_2'}$. Любопытно, также, что при уравнении (12) решаются аналитически, и $\mathcal{E}(h)$ вычисляется в терминах функций Бесселя, что позволяет исследовать кроссовер между областями больших и малых энергий. Последнее, а также решение главного кирального поля для других классических групп будет опубликовано отдельно.

Автор благодарен А.М.Полякову, А.М.Цвелику, А.Б.Замолодчикову, Н.Ю.Решетихину и А.А.Мигдалу за полезные обсуждения на разных этапах работы.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1975, **B59**, 87.
2. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1977, **B72**, 224.
3. *Goldschmidt Y.Y., Witten E.* Phys. Lett., 1980, **B91**, 392.
4. *Polyakov A.M.* Acta Unniver. Wratislaviesis., 1978, No **436**, 53.
5. *Polyakov A.M., Wiegmann P.B.* Phys. Lett. B in press.
6. *Цвелик А.М.* Препринт ИТФ им. Ландау №7 (1983) и Nucl. Phys. to be publ.
7. *Berg B., Karowski M., Theis W., Thun H.J.* Phys. Rev., 1978, **D17**, 1172.
8. *Berg B., Weisz P.* Nucl. Phys., 1978, B **146**, 205; *Abdalla E., Berg B., Weisz P.* ibid 1979, **B157**, 387.
9. *Wiegmann P.B.* Phys. Lett. B to be publ.
10. *Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B.* Ann. of Phys. 1979, **120**, 253.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 января 1984 г.