Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 10, стр. 567 – 570 20 ноября 1972 г.

ОСОБЕННОСТЬ ПОВЕДЕНИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ПЛЕНКИ В ПЕРЕМЕННОМ ПОЛЕ ЧАСТОТЫ, БЛИЗКОЙ К ПОРОГУ

Б. И. Ивлев

Рассмотрим поведение сверхпроводящей пленки во внешнем СВЧ поле, амплитуда которого в реальной экспериментальной ситуации мала по сравнению с критическим значением. Пусть также частота этого поля близка к порогу $2\Delta_o$, где Δ_o – равновесное значение щели. Линейные свойства сверхпроводников при таких частотах хорошо изучены [1], поэтому нас будут интересовать нелинейные эффекты.

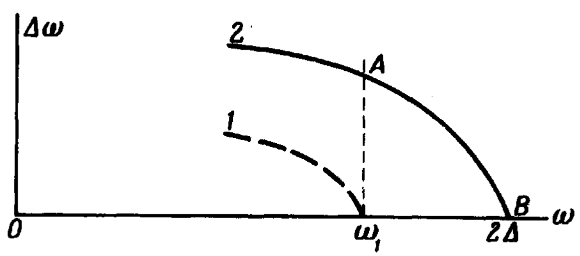
Найдем для этого отклик параметра порядка $\Delta(t)$ на внешнее переменное поле, который будет представлять собой малую добавку к равновесному значению Δ_o. Он выражается через функцию Грина

$$\Delta_\omega = \lambda \int \frac{d\epsilon}{4\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} F_{\epsilon\epsilon-\omega} . \qquad (1)$$

Производя в функции $F_{\epsilon\epsilon-\omega}$ разложение по Δ_ω и потенциалам переменного поля A_ω, перепишем (1) в виде интегрального уравнения

$$\int K(\omega\omega_1)\,\Delta\omega_1\, d\omega_1 = \int a(\omega\omega_1)\, A_{\omega_1} A_{\omega-\omega_1}\, d\omega_1 + \ldots \qquad (2)$$

правая часть которого представляет собой ряд по степеням интенсивности поля, а K и a некие ядра. Без учета зависимости K от потенциалов мы получили бы для Δ_ω ряд по степеням A^2, что соответствует учету нелинейности по теории возмущений. Такой случай был рассмотрен в работе [2], где $K(\omega\omega_1) = (\omega^2 - 4\Delta^2)\,\delta(\omega_1)$.



Учтем теперь зависимость ядра K от переменного поля. Уравнение (2) тогда примет вид

$$(\omega^2 - 4\Delta^2)\,\Delta_\omega + \int \phi A_{\omega_1} A_{\omega_2} \Delta_{\omega-\omega_1-\omega_2}\, d\omega_1 d\omega_2 = \int a\, A_{\omega_1} A_{\omega-\omega_1}\, d\omega_1 . \qquad (3)$$

В силу вышесказанного нас будет интересовать только решение однородного уравнения, поэтому отбросим правую часть (3). При монохроматическом внешнем поле в левой части будет содержаться член типа $A_\omega A_\omega \Delta_{-\omega}$, что соответствует как бы модуляции собственной частоты колебаний $\omega_o = 2\Delta$ с частотой 2ω. Если величина 2ω близка к удвоенной собственной частоте $2\omega_o$, то при определенных условиях окажется возможным параметрический резонанс [3].

Займемся выяснением такой возможности. Для этого необходимо прежде всего вычислить ядро ϕ, которому пропорциональна функция Грина $F_{\epsilon\epsilon-\omega}$, содержащая два потенциала A и одну добавку к щели. При произвольной температуре используем для вычислений методику работы [4], которая позволяет получить проинтегрированные по $\xi = v(p - p_0)$ функции Грина. Произведя по примесям, концентрация которых предполагается большой, так что ℓ_{tr} меньше как длины когерентности, так и толщины пленки, получим при $|\omega - 2\Delta| << \Delta$

$$f_{\epsilon\epsilon-\omega} = 4\pi i \left[D\left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2\Delta\right]_\omega \frac{4\Delta^2}{(2\epsilon-\omega)^2}\,\mathrm{th}\,\frac{|\epsilon|}{2T}\mathrm{th}\,\frac{|\epsilon-\omega|}{2T} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-\Delta^2}\sqrt{\Delta^2-(\epsilon-\omega)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta^2-\epsilon^2}\sqrt{(\epsilon-\omega)^2-\Delta^2}}\right],$$

где $D = v\ell_{tr}/3$ коэффициент диффузии, а все выражение отлично от нуля лишь в области вещественности корней.

Уравнение (3), таким образом, примет вид (при $T << \Delta$)

$$(\omega^2 + 2i\gamma\omega - 4\Delta^2)\,\Delta_\omega + \Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\frac{A_\omega A_{-\omega}}{A_1^2}\,\Delta_\omega + \Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\ \frac{A_\omega A_\omega}{A_1^2}\,\Delta_{-\omega} = 0, \qquad (4)$$

где $(32/\pi)D(e/c)^2A_1^2 = \Delta$ (A_1 имеет порядок величины критического поля массивного образца),и где учтено затухание $\gamma\sim\lambda\,\Delta(\Delta/\omega_D)^2(T/\Delta)^{7/2}$ вычисленное в [2]. Из уравнения (4) видно, что роль поля сводится не только к модуляции собственной частоты колебаний, но и ее перенормировке. Можно аналогично тому, как это делается в [3], показать, что нулевое решение уравнения (4) неустойчиво при заданной интенсивности поля в некотором интервале частот, который будет указан ниже. Поэтому установление конечной амплитуды колебаний связано с эффектами нелинейности, которые должны быть учтены в уравнении (4).

Вычисление высших порядков Δ_ω производится аналогично нахождению члена с A^2. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательное уравнение

$$(\omega^2 + 2i\gamma\omega - 4\Delta^2)\,\Delta_\omega + \Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\frac{A_\omega A_{-\omega}}{A_1^2}\,\Delta_\omega + \Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\ \frac{A_\omega A_\omega}{A_1^2}\,\Delta_{-\omega} + (4\Delta^2-\omega^2)\,f\left(\frac{\Delta_\omega\Delta_{-\omega}}{4\Delta^2-\omega^2}\right) = 0, \qquad (5)$$

где $f(p) = p$ при $p << 1$.

Для нахождения решения положим $A(t) = A\cos\omega t$, а $\Delta(t)$ будем искать в виде $\cos(\omega t + \alpha)$. Тогда, избавляясь в (5) от мнимой части.

получим

$$\omega^2 - 4\Delta^2 + \Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\frac{A^2}{A_1^2} \pm \sqrt{\left[\Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\frac{A^2}{A_1^2}\right]^2 - (4\gamma\Delta)^2} +$$

$$+ (4\Delta^2 - \omega^2)\, f\left(\frac{\Delta_\omega \Delta_{-\omega}}{4\Delta^2 - \omega^2}\right) = 0. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что раскачка колебаний возможна лишь при интенсивности поля, превышающей определенный порог, связанный с затуханием собственных колебаний. Мы будем считать это условие выполненным и пренебрежем поэтому величиной γ в уравнении (6).

Апроксимируя функцию f с хорошей точностью линейной, найдем две ветви решения уравнения (6)

$$\Delta_\omega^{(1)} = \left[4\Delta^2 - \omega^2 - 2\Delta^2\left(\frac{\Delta}{2\Delta-\omega}\right)^{3/2}\frac{A^2}{A_1^2}\right]^{1/2},$$

$$\Delta_\omega^{(2)} = (4\Delta^2 - \omega^2)^{1/2}. \qquad (7)$$

Ход кривых схематично изображен на рисунке, где

$$\frac{2\Delta - \omega_1}{\Delta} = \left(\frac{A}{A_1\sqrt{2}}\right)^{4/5}. \qquad (8)$$

Нижняя кривая, изображенная пунктиром, является неустойчивой. Неустойчивым является также нулевое решение при $\omega_1 < \omega < 2\Delta$. Эта область как раз соответствует параметрическому резонансу. Таким образом, заведомо реализуется участок AB верхней кривой. Максимальное значение Δ_ω при $\omega = \omega_1$

$$\Delta_\omega = 2\Delta(A/A_1\sqrt{2})^{2/5}. \qquad (9)$$

Заметим, что от поля зависит не сама величина Δ_ω, а область неустойчивости нулевого решения. Существенной особенностью рассмотренного явления является то, что поправка к щели меняется с частотой внешнего переменного поля ω, в то время как обычно имеются лишь гармоники Δ на частотах 2ω, 4ω и т. д. Это приводит к гармонике тока 2ω вместо обычной 3ω.

$$j_{2\omega} = -\frac{\sigma}{c}(\Delta A)_{2\omega}(1{,}5 + 1{,}8\,i). \qquad (10)$$

Итак, в эксперименте можно получить следующее: в области частот $(2\Delta - \omega)/\Delta \sim (A/A_1)^{4/5}$ ниже порога имеется отраженный от пленки сигнал частоты 2ω и относительной величины $j_{2\omega}/j_\omega \sim (A/A_1)^{2/5}$.

Проделанные вычисления относились к случаю низкой температуры $T \ll \Delta$. В области температур $T \sim \Delta$ наряду с ростом затухания γ произойдет лишь перенормировка коэффициентов.

Я благодарен Г.М.Элиашбергу за обсуждение результатов.

Поступила в редакцию
17 октября 1972 г.

Литература

[1] А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 35, 265, 1958.

[2] Б.И.Ивлев. Письма в ЖЭТФ, 15, 441, 1972.

[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. М., Изд. Наука, 1965.

[4] Г.М.Элиашберг. ЖЭТФ, 61, 1254, 1971.