Письма в ЖЭТФ, том 18, вып. 2, стр. 126 – 130　　　　*20 июля 1973 г.*

О ПОВЕРХНОСТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КАПЛИ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В.А.Ходель

На основе условий самосогласования исследуются коллективные свойства капли ферми-жидкости. Получены формулы для вычисления характеристик спектра поверхностных колебаний. Показано, что для достаточно больших L спектр поверхностных колебаний капли ферми-жидкости оказывается гидродинамическим.

В предыдущей работе автора [1] была сделана попытка выяснить условия, при которых ферми-система конечных (но достаточно больших) размеров ведет себя как капля жидкости: ее радиус растет по закону $R = r_0 N^{1/3}$ и вследствие этого при добавлении даже относительно небольшого числа частиц k плотность системы меняется в основном на краю, где это изменение имеет порядок $\delta\rho(r \approx R) \sim \frac{\partial\rho}{\partial R}\partial R \sim \frac{k}{N^{2/3}}$ (для газа частиц, заключенных в ящик того же размера, изменение $\delta\rho(r \approx R) \sim \frac{k}{N}$). Такое поведение $\delta\rho$ для капли однозначно связано с существованием спектра низколежащих поверхностных коллективных возбуждений, характеристики которых стандартным образом выражаются через параметры C_L и B_L коллективного гамильтониана

$$H(a) = \frac{1}{2}\Sigma C_L |a_{L\mu}|^2 + \frac{1}{2}\Sigma B_L |\dot{a}_{L\mu}|^2. \tag{1}$$

В работе [1] была рассмотрена простая модель, в которой считалось, что локальное взаимодействие Γ^{ω} между квазичастицами отлично от нуля лишь на поверхности систем, где оно совпадает с пустотным Γ^{vac}. Было найдено, что жидкостные свойства возникают у системы тогда, когда значение безразмерного параметра $f = \Gamma^{vac} p_F M^*/\pi^2$ (p_F – импульс Ферми) становится близким к не зависящему от размеров системы критическому значению f_c, при котором частота монопольных колебаний обращается в нуль.

В данной работе будет показано, что в реальной системе сохраняются многие черты модели [1]. Мы начнем с рассмотрения условия самосогласования для квазичастичного гамильтониана $H_q(r,p) = \frac{p^2}{2M^*} + V(r)$ функции Грина квазичастицы $G^q(r,p,\epsilon) = a(r)(\epsilon - H_q)^{-1}$ и локального взаимодействия $\Gamma^\omega(r)$. Это условие проще всего вывести, если потребовать, чтобы частота ω_1 дипольного колебания равнялась нулю, так как такое колебание есть не что иное, как сдвиг центра тяжести системы. Это означает, что стандартное уравнение теории конечных ферми-систем [2], определяющее спектр коллективных возбуждений мультипольности L (мы ограничиваемся здесь нулевой гармоникой локального взаимодействия Γ^ω)

$$g_L(r,\omega_S) = \Gamma^\omega(r) \int A_L(r,r'\omega_S)\, g_L(r',\omega_S)\, d\tau' \qquad (2)$$

где $d\tau = r^2 dr$ и

$$A_L(r,r',\omega) = \frac{1}{4\pi} \iint A(\mathbf{r},\mathbf{r}'\omega) P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}')\, d\mathbf{n}\, d\mathbf{n}' \qquad (2')$$

$$A(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega) = \int G^q(\mathbf{r},\mathbf{r}',\epsilon + \frac{\omega}{2})\, G^q(\mathbf{r}',\mathbf{r},\epsilon - \frac{\omega}{2})\, d\epsilon/2\pi i \qquad (2''),$$

имеет решение при $\omega_1 = 0$.

Как известно, амплитуда $g_L(r)$ пропорциональна изменению самосогласованного поля $\Sigma(r)$ при переходе от основного состояния к коллективному возбуждению системы. Аналогично, амплитуда $g_L^+(r)$ удовлетворяющая уравнению, сопряженному (2), пропорциональна изменению плотности $\rho^q_{(r)} = \int G^q(r,r,\epsilon)d\epsilon/2\pi i$ при переходе от основного к коллективному состоянию). Из сказанного выше следует, что $g_1(r) \sim \frac{\partial\Sigma(r,\mu)}{\partial r}$

$$\frac{\partial\Sigma(r,\mu)}{\partial r} = \Gamma^\omega(r) \int A_1(r,r'\omega = 0)\, \frac{\partial\Sigma(r',\mu)}{\partial r'}\, d\tau' \qquad (3)$$

так как $g_1(r) \sim \Sigma(\mathbf{r} + \delta\mathbf{R}) - \Sigma(\mathbf{r}) \sim \frac{\partial\Sigma}{\partial r}\,\delta R$, где δR – сдвиг центра тяжести системы; $a\,\Sigma(r,\mu) = (M^*/M)V(r) - \mu\left(\frac{M^*}{M} - 1\right)$ [2].

Аналогично $g_1^+ \sim \frac{\partial\rho''}{\partial r}$, и мы можем переписать (3) в виде:

$$\frac{\partial\rho^q(r)}{\partial r} = \int A_1(r,r',\omega = 0)\,\Gamma^\omega(r')\,\frac{\partial\rho^q(r')}{\partial r'}\, d\tau' \qquad (4)$$

(в иной форме условие самосогласования было выведено в работе [3]. Автор благодарит доктора Майера за сообщение об этой работе). Грубую оценку значения $f^{vac} = \frac{\Gamma^{vac} p_F M}{\pi^2}$, при котором впервые появляется нетривиальное решение (4), можно получить, заменив в (4) Γ^ω на

Γ^{vac}, поскольку в окрестности критической точки поверхность размывается и разница между Γ^{ω} и Γ^{vac} становится несущественной. Если в (4) использовать квазиклассическую формулу $A(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{p_F M}{\pi^2}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, то мы найдем: $f_c^{vac} = -1$. Отметим, что нейтронная жидкость этому грубому критерию удовлетворяет, так как вычисленное Ю.В.Гапоновым для свободных нейтронов, рассеивающихся при энергиях $\epsilon \sim 40$ *Мэв*, значение $f_{пл}^{vac} = -1{,}4$ [2].

С помощью соотношения (4) нетрудно убедиться, что существует целый спектр низколежащих поверхностных колебаний. Действительно, пропагатор $A(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$, определяемый интегралом (2′′), имеет резкий δ-образный пик в точке $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ с шириной $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim r_0$. Для рассматриваемого случая поверхностных волн этот пик дает определяющий вклад в (2) и поэтому при $L < N^{1/3}$ полином Лежандра $P_L(x)$ можно в первом приближении вынести из-под интеграла в (2) в точке $x = 1$ в результате чего A_L уже не будет зависеть от L. Тогда, очевидно, $\omega_L = \omega_1 = 0$ и $g_L = g_1 \sim \partial\Sigma/\partial r$, т. е. спектр поверхностных колебаний оказывается вырожденным. В следующих приближениях это вырождение снимается: 1)благодаря существованию у $A(r_1, r_2)$ дальнодействующих компонент в $g_L(r)$ появляются объемные поправки $g_L^{in}(r)$, амплитуда которых убывает с ростом L; g_L^{in} $N^{-1/3}L^{-1}g_1(k)$; 2) вклад локальной части $A(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ в интеграл (2′) также убывает с ростом L. При $L > 1$ частоты поверхностных колебаний можно найти из соотношения

$$\omega^2 = \iint \frac{\partial\Sigma(r_1)}{\partial r_1}\Big(A_1(r_1, r_2, \omega = 0) - A_L(r_1, r_2\, \omega = 0)\Big)\frac{\partial\Sigma}{\partial r_2}\, dr_1 dr_2 \Big/ \iint \frac{\partial\Sigma(r_1)}{\partial r_1} \times$$
$$\times \left(\frac{dA_L(r_1 r_2)}{d\omega^2}\right)_0 \frac{\partial\Sigma}{\partial r_2}\, dr_1 dr_2 \qquad (5)$$

вытекающего из (2) и (3). В рассматриваемом случае $L > 1$ числитель (5), определяющий поверхностную жесткость C_L можно упростить, подставив в (2′) разложение $P_L(x) = 1 - \frac{L(L+1)}{2}(1 - x)$ откуда следует

$$A_1(r_1, r_2) - A_L(r_1, r_2) = \frac{L(L+1)}{8\pi}\iint A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(1 - \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)\, d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2. \qquad (6)$$

Сравнивая теперь (5) с гидродинамической жесткостью $C_L \sim \sigma R^2(L-1)(L+2)$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения, можно получить следующую формулу для σ (в приближении нулевого радиуса сил взаимодействия)

$$\sigma = \frac{1}{8\pi}\iint \frac{\partial\Sigma(r_1)}{\partial r_1} A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega = 0)\,(1 - \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)\frac{\partial\Sigma(r_2)}{\partial r_2}\, d^3r_1 d^3r_2. \qquad (7)$$

Грубое вычисление этого интеграла в модели прямоугольной ямы дает для ядра значение $4\pi R^2\sigma \approx 25A^{2/3}$ *Мэв*, что всего на 30% отличается от экспериментального.

Несколько более сложным оказывается вычисление правой части. После довольно длинных выкладок, мы получаем $(dA_L/d\omega^2)_0 \sim L^{-1}$, откуда следует, что $\omega_L^2 \sim L^3/N$, т. е. спектр поверхностных колебаний с $L > 1$ оказывается гидродинамическим. Вернемся в заключение снова к малым L, точнее к случаю $L = 0$. Нетрудно видеть, что в отличие от обычной гидродинамики среди поверхностных колебаний имеется и монопольное ($L = 0$). Его частота $\omega_0 \quad \epsilon_F N^{-1/3}$, а амплитуда $g_0(r,\omega)$ (см. (2)) имеет резкий максимум на поверхности системы. Хотя уровень 0^+ с такими свойствами еще не наблюдался (возможный кандидат – первый уровень в ^{16}O, лежащий на высоте 6,06 *Мэв*), его влияние на поведение системы очень существенно: куда бы ни были добавлены частицы, они сильно возбуждают этот коллективный уровень, в результате чего наибольшее изменение плотности происходит на краю системы и ее объем растет пропорционально числу частиц. Чтобы увидеть это, напишем обычное уравнение для изменения плотности $\delta\rho$ (точнее сферически симметричной компоненты) при добавлении нескольких частиц [2].

$$\delta\rho(r) = \delta_0\rho(r) + \int A_0(r, r', \omega = 0)\Gamma^{\omega}(r')\delta\rho(r')\,dr', \tag{8}$$

где $\delta_0\rho(r) = \Sigma\phi^2_{\lambda_i}(r)$.

Имея в виду соотношение (4) удобно выделить из A_0 поверхностное слагаемое

$$A_0(r_1, r_2) = \kappa_0 \frac{\partial\rho^q(r_1)}{\partial r_1}\frac{\partial\rho^q(r_2)}{\partial r_2} + \mathcal{A}_0(r_1, r_2), \tag{9}$$

где κ_0 определяется требованием:

$$\int \frac{\partial\rho^q(r_1)}{\partial r_1}\mathcal{A}_0(r_1, r_2)\frac{\partial\rho^q(r_2)}{\partial r_2}\,dr_1\,dr_2 = 0. \tag{10}$$

В результате такого разбиения A_0 в $\delta\rho$ можно аккуратно выделить поверхностный вклад и записать решение (8) в виде

$$\delta\rho(r) = \delta_1\rho(r) + \nu_0\delta_2\rho(r), \tag{11}$$

где $\delta_1\rho$ удовлетворяет уравнению

$$\delta_1\rho(r) = \delta_0\rho(r) + \int\mathcal{A}_0(r, r')\Gamma^{\omega}(r')\delta_1\rho(r')\,dr', \tag{12}$$

решение которого нечувствительно к деталям поведения $\Gamma^{\omega}(r)$ в переходном слое. Функция $\delta_2\rho(r)$, определяемая уравнением

$$\delta_2\rho(r) = \frac{\partial\rho^q(r)}{\partial r} + \int\mathcal{A}_0(r, r')\Gamma^{\omega}(r')\delta_2\rho(r')\,dr' \tag{13}$$

имеет резкий максимум на поверхности, внутри она мала. Константа ν_0 определяется соотношением

$$\nu_0 = \kappa_0 \int \frac{\partial \Sigma(r)}{\partial r} \delta_1 \rho(r)\, dr \Big/ (1 - \kappa_0' \int \frac{\partial \Sigma(r)}{\partial r} \delta_2 \rho(r)\, dr). \qquad (14)$$

Знаменатель этого выражения мал и поэтому ν_0 имеет оценку $\nu_0 \sim N^{-1}/N^{-1/3} \sim N^{-2/3}$, откуда $\delta\rho(r \approx R) \sim k/N^{2/3}$. Это означает, что реальное ядро ведет себя уже не как газ взаимодействующих квазичастиц, а как жидкость.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Г.А.Пик-Пичаку, В.М.Галицкому, Д.П.Гречухину, Р.О.Зайцеву, А.Б.Мигдалу, Э.Е.Саперштейну и С.А.Фаянсу за плодотворное обсуждение работы.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
25 мая 1973 г.

Литература

[1] В.А.Ходель. Письма в ЖЭТФ, 16, 410, 1972.

[2] А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., изд. Наука, 1965.

[3] H. Mikeska, W. Brenig Z. Phys., 220, 321, 1969.