Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 8, стр. 316 – 319 *25 апреля 1985 г.*

НЕЛИНЕЙНАЯ ДРЕЙФОВАЯ ТИРИНГ-МОДА. ЖЕСТКИЙ РЕЖИМ ВОЗБУЖДЕНИЯ И МЕХАНИЗМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

А.А.Галеев, Л.М.Зеленый, М.М.Кузнецова

Рассмотрена нелинейная теория развития магнитных возмущений в бесстолкновительных конфигурациях с широм магнитного поля. Эволюция неустойчивости исследована с учетом динамики ионов и потенциальных электрических полей, которые определяют стабилизацию моды. Найдено, что дрейфовая тиринг-мода обладает метастабильными свойствами: в нелинейном режиме возможно нарастание даже линейно устойчивых возмущений конечной амплитуды.

Развитие магнитных возмущений определяет условия удержания лабораторной и космической плазмы магнитным полем. Поэтому изучение нелинейной эволюции магнитных островов по-прежнему остается в центре внимания исследователей. Магнитные острова образуются в окрестности так называемых сингулярных поверхностей, на которых продольная компонента волнового вектора возмущений $k_{\|}(X_S) = 0$, за счет свободной энергии, связанной с широм магнитного поля. В простейшем линейном случае [1] неустойчивость (тиринг-мода) развивается за счет резонансного поглощения энергии возмущений электронами в малой ($|x| = |X - X_S| < \delta_e$) окрестности сингулярной поверхности. Толщину области δ_e легко найти, учитывая, что внутри нее величина доплеровского сдвига $k_{\|}(x)v_{Te}$ должна быть мала по сравнению с частотой возмущений ω: $\delta_e = \omega / \left(\dfrac{dk_{\|}(x)}{dx} v_{Te}\right)\Big|_{x=0}$. Основным эффектом при исследовании нелинейной динамики магнитных возмущений является модификация ими орбит резонансных частиц (электронов) [2–4]. Наиболее последовательно нелинейное возмущение электронных траекторий рассчитано в недавно опубликованной работе [5]. Окончательный результат, однако, совпадает с результатами более простых расчетов [2, 3]: в бесстолкновительном случае неустойчивость стабилизируется, когда полуширина магнитного острова w становится сравнима с величиной δ_e. Иного результата и не может получиться, если учитывать только электроны. В [4, 6] было показано, что при учете движения ионов развитие нелинейной дрейфовой тиринг-моды ($\omega \sim \omega_e$, $\omega_j = -\dfrac{c\mathbf{k}\,[T_j \vec{\nabla} n \mathbf{B}]}{e_j B^2 n(x)}$) оказывается возможным и при $w \gg \delta_e$. Однако в [4, 6] пренебрегалось электростатической компонентой возмущенного электрического поля $-ik_{\|}\phi(x)$, которая фактически ограничивает область взаимодействия $E_{\|}(x) \neq 0$ на некотором характерном расстоянии $|x| < \delta_\phi$ [7, 8].

Поведение $\phi(x)$ определяется в основном динамикой ионов и поэтому использование линейных выражений для $\phi(x)$ возможно даже при $w > \delta_e$. Учет движения ионов приводит к появлению дополнительных затрат энергии на возбуждение движений плазмы ионно-звукового типа. В линейном случае этот эффект может привести к полной стабилизации достаточно коротковолновых возмущений.

Как мы покажем ниже, в нелинейном режиме $w > \delta_e$, когда основную роль играют уже не резонансные, а захваченные электроны, тип моды изменяется (аналогом таких мод в тороидальной геометрии являются моды на запертых частицах, рассмотренные в [9]). Соответственно изменяется и роль взаимодействия с продольными движениями ионов. Для нелинейной моды она оказывается дестабилизирующей, так что, в частности, становится возможно развитие возмущений конечной амплитуды, устойчивых в линейном приближении (жесткий режим возбуждения неустойчивости). Амплитуда нелинейной моды растет со временем по степенному закону, пока не достигнет достаточно высокого уровня, определяемого условием $w \lesssim w_{\text{нас}} \sim \delta_\phi$.

В качестве исходной конфигурации с широм магнитного поля удобно выбрать обобщенное распределение Харриса

$$\mathbf{B} = B_0 \,\mathrm{th}\, \frac{X}{L}\, \mathbf{e}_z + B_y \mathbf{e}_y\,, \qquad L_S \simeq L B_y / B_0\,. \tag{1}$$

Рассмотрим устойчивость Фурье гармоник возмущений векторного $\mathbf{A}$ и скалярного ϕ потенциалов $\{\mathbf{A}, \phi\} = \{\mathbf{A}(x), \phi(x)\} \exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, $x = X - X_S$, $\mathbf{k} = (0, k_y, k_z)$. Уравнение для $A_\parallel(x)$ имеет известный вид [8, 9]:

$$\frac{d^2 A_\parallel}{dx^2} - k^2 A_\parallel - V_0 A_\parallel = \sum_j V_j A_\parallel\,, \qquad V_0 = -\frac{2k_z^2}{L^2 k^2}\, \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{X_S + x}{L}\right)\,, \tag{2}$$

$$V_j(x) A_\parallel = -\left(A_\parallel - \frac{k_\parallel c}{\omega}\phi\right) \frac{4\pi e_j^2}{c^2 T_j} \int_{-\infty}^{\infty} v_\parallel f_{0j}\, i(\omega - \omega_j)\, dv_\parallel \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)} v_\parallel(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Собственные значения ω при этом определяются дисперсионным уравнением

$$\Delta' = L \sum_j \int_0^\infty V_j\, dx\,. \tag{4}$$

Параметр Δ' соответствует свободной энергии неустойчивости (см. [1, 4, 6]).

В [6] получены уравнения для траекторий частиц в возмущенном магнитном поле и показано, что интеграл в (4) можно разбить на три части:

$$\sum_j \int_0^\infty V_j dx = \sum_j U_j^{TR} + \sum_j U_j^S + \sum_j U_j^{UT}\,, \tag{5}$$

U_j^{TR} – вклад от "запертых" частиц, движущихся внутри острова по замкнутым траекториям; U_j^S – вклад от частиц, движущихся в окрестности сепаратрисы (границы острова); U_j^{UT} – вклад от "пролетных" частиц вне острова.

Вычислим вклад от пролетных ионов U_i^{UT}, учитывая структуру $E_\parallel(x)$. Если $w < \delta_i = \left| \omega / v_{Ti} \frac{dk_\parallel}{dx} \right|$, то траектории пролетных ионов возмущаются слабо и их можно описывать в линейном приближении [6]. При развитии дрейфовой тиринг-моды ($\omega = \omega_e + i\gamma$, $|\gamma| \ll |\omega|$) поведение $\phi(x)$ определяется в основном ионами. Таким образом, если $w \ll \delta_i$ и $\delta_i > \rho_i$, то в области $|x| > w$ можно по-прежнему пользоваться линейным выражением для $\phi(x)$ [8]:

$$\phi(x) = \frac{\omega A_\parallel}{k_\parallel c}\left[\frac{i x^2}{2\delta_\phi^2} \int_0^{\pi/2} \exp\left\{-\frac{i x^2}{2\delta_\phi^2}\cos\theta\right\}\sqrt{\sin\theta}\, d\theta\right], \qquad \delta_\phi = \sqrt{\delta_i \rho_i} < \delta_i\,. \tag{6}$$

Выполняя в (3) интегрирование по невозмущенным ионным траекториям, найдем, используя (6), общий интегральный вклад в (4) от пролетных ионов.

$$U_i^{UT} = L \int_w^\infty V_i dx = \epsilon_i^{-2} \frac{\omega - \omega_i}{\omega} \frac{\delta_\phi}{L} (F_1 - i F_2), \tag{7}$$

$$F_1 = \frac{\Gamma(3/4)\pi}{\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)} - \bar{w} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4) 2^{3/4}}{4} \int_0^{\bar{w}^2/2} z^{1/4}\, \mathbf{H}_{1/4}(z)\, dz\,, \tag{8}$$

$$F_2 = \frac{\Gamma(3/4)\pi}{\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)}\left[1 - \frac{\pi \bar{w}^2}{4}\left(J_{1/4}\left(\frac{\bar{w}^2}{2}\right)\mathbf{H}_{-3/4}\left(\frac{\bar{w}^2}{2}\right) - J_{-3/4}\left(\frac{\bar{w}^2}{2}\right)\mathbf{H}_{1/4}\left(\frac{\bar{w}^2}{2}\right)\right)\right]\,, \tag{9}$$

где $\bar{w} = w/\delta_\phi$, $\epsilon_j = \dfrac{v_{Tj} m_j c}{e B_0 L} \cong \dfrac{\rho_i B_y}{L B_0}$; $J_{1/4}$, $J_{-3/4}$ – функции Бесселя; $\mathbf{H}_{1/4}$, $\mathbf{H}_{-3/4}$ – функции Струве.

Поскольку влияние уменьшения $E_{\|}(x)$ за счет электростатического поля $-\ ik_{\|}\phi(x)$ не успевает сказаться на электронах, а также на захваченных ионах и ионах в окрестности сепаратрисы, то в (4) можно использовать найденные ранее [6] выражения для U_j^{TR}, U_j^{S}, U_e^{UT}. Используя (7) получаем:

$$\Delta' = \epsilon_i^{-2}\ \frac{\omega - \omega_i}{\omega}\ \frac{\delta_\phi}{L}\ (2\bar{w} + F_1 - iF_2) + U_e, \tag{10}$$

$$U_e = \epsilon_e^{-2}\ \frac{\omega - \omega_e}{\omega}\ \frac{w}{L} \begin{cases} 2 - i\sqrt{\pi}(\delta_e/w), & w \ll \delta_e & (11) \\ 0{,}2 - i\sqrt{\pi}(\delta_e/w)^3, & w \gg \delta_e. & (12) \end{cases}$$

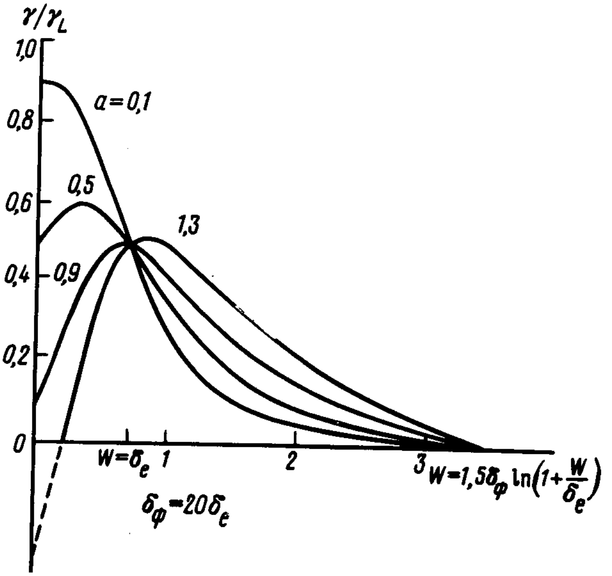
Решение уравнения (10) можно представить в виде $\omega = \mathrm{Re}\,\omega + i\gamma, \mathrm{Re}\,\omega \sim \omega_e$:

$$\gamma(w) = \omega_e \frac{\epsilon_e^2 2L}{\delta_e\sqrt{\pi}}\ \frac{\Delta' - (\epsilon_i^{-2} F_1 \delta_\phi/L)(1 - 2w/\sqrt{\pi}\delta_e)}{1 + (2w/\sqrt{\pi}\,\delta_e)^2}, \quad w < \delta_e \tag{13}$$

$$\gamma(w) \cong \omega_e\ \frac{10\epsilon_e^2}{\epsilon_i^2}\ \frac{\delta_\phi}{w}\ F_2(w), \qquad w > \delta_e. \tag{14}$$

При $w = 0$, $F_1(0) = 0$ инкремент (13) сводится к известному линейному выражению $\gamma_L = \omega_e(\epsilon_e^2 2\Delta' L/\delta_e\sqrt{\pi})$ [1]. Учет продольных движений ионов уменьшает γ_L и при $a = \epsilon_i^{-2}\ \delta_\phi F_1(0)/L\,\Delta' > 1$ приводит к полной стабилизации моды [7, 8]. Величина a, таким образом, определяет насколько далеко от порога линейной устойчивости находится мода. На рисунке изображены, рассчитанные с помощью (10) – (14), зависимости γ от w для различных значений a.

Развитие дрейфовых тиринг-мод в нелинейном режиме определяется захваченными электронами и пролетными ионами. При $w > \delta_e$ $\gamma_{NL}(w) \cong \gamma_L\, a\frac{\delta_e}{w}$, поэтому при $a \ll 1$ γ_{NL} быстро спадает от $\gamma(0) \sim \gamma_L$ к малому значению $\sim \gamma_L a$. Напротив, для линейно слабо неустойчивых мод с $a \lesssim 1$, γ_{NL} меняется при развитии неустойчивости от малого значения $\gamma(0) \sim \gamma_L(1 - a) \ll \gamma_L$ до $\gamma_{NL} \sim \gamma_L(\delta_e/w)$.



Зависимость нелинейного инкремента неустойчивости от толщины магнитного острова: a – параметр линейной надпороговости системы

Очень важно, что в нелинейном режиме неустойчивость как бы забывает о своей линейной предыстории. При этом становится возможен жесткий режим ее возбуждения. Рассмотрим моды с $a > 1$, находящиеся ниже порога линейной устойчивости (см. рисунок). Возмущения конечной величины с амплитудой $w_0 \sim \delta_e$ быстро нарастают в нелинейном режиме $\gamma_{NL}(w_0) \sim \gamma_L a(\delta_e/w_0)$, хотя и являются устойчивыми. Принципиальным здесь является то, что процесс спонтанного пересоединения (развитие тиринг-моды) в конфигурациях с широм магнитного поля (типа (1)) обладает метастабильными свойствами.

Взаимодействие нелинейной моды с пролетными ионами ограничено шириной области взаимодействия, где $E_\parallel \neq 0$: $w < |x| < \delta_\phi$. В случае, когда w становится соизмеримо с δ_ϕ, внутри области взаимодействия практически не остается пролетных ионов, и развитие неустойчивости должно прекратиться. Это подтверждается и точным численным решением уравнения (14): $\gamma_{NL} \sim F_2(w) = 0$ при

$$w = w_{\text{нас}} = 1{,}5\,\delta_\phi\,. \tag{15}$$

В рассматриваемом случае $B_y/B_0 \gg 1$, когда $\rho_i \ll \delta_i$, величина $\delta_\phi = \sqrt{\rho_i\delta_i}$ мала по сравнению с δ_i, так что (15) подтверждает использованное выше предположение, что эволюция неустойчивости происходит в интервале $0 < w < w_{\text{нас}} \ll \delta_i$.

На нелинейной стадии неустойчивость носит сложный характер – ее динамика не определяется каким-либо одним сортом частиц и электростатическая составляющая поля должна учитываться наряду с индукционной. Размер островов (см. (14)) приблизительно линейно растет со временем и в конечном состоянии достигает высокой (по сравнению с предыдущими расчетами) величины $w \sim \delta_\phi$. Максимальная амплитуда магнитных возмущений при этом равна $b^*_{\text{нас}} = \dfrac{B_1}{|B|} \sim \dfrac{dk_\parallel}{dx}\dfrac{w^2}{2} \sim \dfrac{\omega_e}{\omega_{Bi}}$. Оценка этой величины для условий токамака показывает, что флуктуации могут достигать достаточно большего уровня $\sim 10^{-4}$, что должно повлиять на процессы поперечного переноса. Кроме того, во многих даже линейно устойчивых системах магнитные флуктуации с амплитудой больше пороговой $b^0 > b^*_{\text{пор}} = b^*_{\text{нас}} \dfrac{m_e L_S}{m_i L}$ начнут алгебраически нарастать со временем. С этим обстоятельством может быть связан спонтанный "метастабильный" характер процесса пересоединения в целом ряде явлений космической и лабораторной плазмы.

Литература

1. *Laval G., Pellat R., Vuillemin M.* Plasma phys. and controlled fusion res., Vienna, IAEA, 1966, **2**, 259.
2. *Drake J.F., Lee Y.C.* Phys. Rev. Lett., 1977, **39**, 453.
3. *Biskamp D.* Preprint, Max-Plank Inst. fur Plasmaphysik, 1977.
4. *Галеев А.А., Зеленый Л.М.* Письма в ЖЭТФ, 1977, **29**, 669.
5. *Hazeltine R.D., Swartz K.* Phys. Fluids, 1984, **27**, 2043.
6. *Зеленый Л.М., Тактакишвили А.Л.* Физика плазмы, 1984, **10**, 50.
7. *Bussac M.N., Edery D., Pellat R., Soule J.L.* Phys. Rev. Lett., 1978, **40**, 1500.
8. *Coppi B., Mark J.W., Sigiyama L., Bertin G.* Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, 1058.
9. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* ЖЭТФ, 1966, **51**, 1737.

Институт космических исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 января 1985 г.