МАГНИТНАЯ ВСЕЛЕННАЯ С МАТЕРИЕЙ

И.М.Халатников

Под электромагнитной вселенной понимают совместное решение уравнений Максвелла для электромагнитного поля и уравнений Эйнштейна для гравитационного поля. Свойства электромагнитной вселенной обсуждались в последнее время в ряде работ [1,2].

Значительный астрофизический интерес представляет так называемая цилиндрическая магнитная вселенная. В этом стационарном решении уравнений гравитации в пустоте магнитное поле с циллиндрической симметрией полностью определяется метрикой пространства, а метрика в свою очередь определяется тензором энергии и импульса магнитного поля. Такое решение в пустоте (электрический ток равен нулю) как было показано Мелвином [1] устойчиво относительно малых возмущений. К.Торном [2] показана и абсолютная устойчивость относительно произвольных возмущений, не нарушающих циллиндрическую симметрию.

Мы здесь рассмотрим решения типа магнитной вселенной при наличии незаряженной материи, описываемой уравнением состояния $p = a\epsilon$. Будем искать решение в сопутствующей системе отсчета ($u_0 u^0 = -1$, $u_a = 0$) с диагональной метрикой, зависящей от одной переменной (x^2)

$$-ds^2 = \nu_i e^{2F_i} (dx^i)^2, \quad F_i = F_i(x^2) \quad (\nu_0 = -1, \nu_a = 1). \tag{1}$$

Магнитное поле направим по оси x^3. Тогда интегрируя уравнения Максвелла

$$\frac{\sigma F^{ik}\sqrt{-g}}{\sigma x^k} = 0 \tag{2}$$

получим

$$F'^2 = \frac{H_0}{\sqrt{-g}} = \frac{H_0}{e^{F_0+F_1+F_2+F_3}}, \tag{3}$$

где H_0 – некоторое характерное постоянное магнитное поле. Отличные от нуля компоненты тензора энергии и импульса электромагнитного поля

($T_i^k = \frac{1}{4\pi}(F_{ie}F^{kl} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{lm}F^{lm})$) равна

$$T_1^1 = T_2^2 = -T_3^3 = -T_4^4 = \frac{H_0^2}{8\pi}\,\frac{e^{2F_1}}{e^{2(F_0+F_1+F_3)}}, \tag{4}$$

а тензора энергии и импульса материи $T_i^k = (\epsilon + p)\,u_i u^k + p\,\delta_i^k$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = a\epsilon, \quad T_0^0 = -\epsilon, \quad T = (-1 + 3a)\,\epsilon. \tag{5}$$

Теперь мы можем записать соответствующие компоненты уравнений Эйнштейна

$$(R_i^k = \frac{8\pi\kappa}{c^4}(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T))$$

$$R_0^0 = e^{-2F_2}[-F_0'' + F_0'(F_2' - F_0' - F_1' \cdot F_3')] = \frac{8\pi\kappa}{c^4}[-\frac{H_0^2}{8\pi}\,\frac{e^{2F_1}}{e^{2(F_0+F_1+F_3)}} -$$

$$- \frac{1}{2}(1 + 3a)\,\epsilon], \tag{6}$$

$$R_1^1 = e^{-2F_2}[-F_1'' + F_1'(F_2' - F_1' - F_3')] = \frac{8\pi\kappa}{c^4}[\frac{H_0^2}{8\pi}\,\frac{e^{2F_1}}{e^{2(F_0+F_1+F_3)}} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - a)\,\epsilon], \tag{7}$$

$$R_3^3 = e^{-2F_2}[-F_3'' + F_3'(F_2' - F_0' - F_1' - F_3')] = \frac{8\pi\kappa}{c^4}[-\frac{H_0^2}{8\pi}\,\frac{e^{2F_1}}{e^{2(F_0+F_1+F_3)}} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - a)\,\epsilon], \tag{8}$$

$$R_2^2 = e^{-2F_2}[-(F_o'' + F_1'' + F_3'') + F_2'(F_o' + F_1' + F_3') - (F_0'^2 + F_1'^2 + F_3'^2)] =$$

$$\frac{8\pi\kappa}{c^4}\left[\frac{H_o^2}{8\pi}\,\frac{e^{2F_1}}{e^{2(F_o+F_1+F_3)}} + \frac{1}{2}(1-a)\,\epsilon\right]. \qquad (9)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по переменной x^2.

Поскольку метрика зависит от одной переменной, мы можем воспользоваться преобразованием $x^2 - \bar{x}^2$ и добиться того, чтобы было выполнено условие

$$F_2 = F_o + F_1 + F_3 \qquad (10)$$

после чего вид уравнений очень упростится. Кроме того, введем обозначение

$$\epsilon = \frac{H_o^2}{8\pi}\,\frac{\tilde{\epsilon}}{e^{2F_2}}$$

и будем измерять длину в единицах $a = \dfrac{c^2}{H_o\sqrt{\kappa}}$.

В результате уравнений (6-9) приобретают следующий вид:

$$-F_o'' = e^{2F_1} - \frac{1}{2}(1+3a)\,\tilde{\epsilon}, \qquad (6')$$

$$-F_1'' = -e^{2F_1} + \frac{1}{2}(1-a)\,\tilde{\epsilon}, \qquad (7')$$

$$-F_3'' + e^{-2F_1} + \frac{1}{2}(1-a)\,\tilde{\epsilon}, \qquad (8')$$

$$-(F_o'' + F_1'' + F_3'') + (F_o' + F_1' + F_3')^2 - (F_0'^2 + F_1'^2 + F_3'^2) = e^{2F_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1-a)\,\epsilon, \qquad (9')$$

где теперь штрихом обозначено дифференцированное по безразмерной переменной $\sigma = \dfrac{x^2}{a}$. Первые интегралы уравнений (6′–8′)

$$F_1' = -\sqrt{n^2 - e^{2F_1} - (1-a)\int \tilde{\epsilon}\, dF_1}$$

$$F_o' = -F_1' + 2a\int \tilde{\epsilon}\, d\sigma + n \qquad (11)$$

$$F_3^1 = -F_1' - (1-a)\int \tilde{\epsilon}\, d\sigma + n$$

(n — константа интегрирования). Уравнение (9′) дает условие для определения $\tilde{\epsilon}$.

$$(1-a)\int \tilde{\epsilon}\, dF_1 + n(3a-1)\int \tilde{\epsilon}\, d\sigma - 2a(1-a)\int (\tilde{\epsilon}\, d\sigma)^{\Sigma} = a\tilde{\epsilon}. \qquad (12)$$

К сожалению, дальнейшее интегрирование в общем виде для произвольного значения a не удается произвести. Исключением является лишь случай $a = 0$ (пылевидная материя) и $a = 1$*.

Вначале рассмотрим случай, когда плотность энергии мала (для произвольного значения a). Тогда из (12) получаем

$$(\ \tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \exp\left\{\frac{1-a}{a} F_1 - \frac{1-3a}{a} n\sigma\right\}\ ), \qquad (13)$$

а из (11) имеем

$$e^{F_1} = \frac{n}{\mathrm{ch}\, n\sigma}, \qquad e^{F_2} = e^{2n\sigma}\, \mathrm{ch}\, n\sigma. \qquad (14)$$

Плотность энергии материи ϵ равна

$$\epsilon = \tilde{\epsilon}\, \frac{H_0^2}{8\pi e^{2F_2}} = \epsilon_0 \frac{H_0^2}{8\pi} (\mathrm{ch}\, n\sigma\ e^{n\sigma})^{-\frac{1+a}{a}}, \qquad (15)$$

а плотность электромагнитной энергии равна

$$-T_0^0 = \frac{H_0^2}{8\pi} e^{2(F_1 - F_2)} = \frac{H_0^2 n^2}{8\pi(\mathrm{ch}\, n\sigma\, e^{n\sigma})^4}. \qquad (16)$$

Метрика (14) преобразованием $e^{n\sigma} \to \rho$ приводится к метрике Мелвина [1] $(x^1 \to \phi)$**

$$-ds^2 = (\rho^2 + 1)(-dt^2 + d\rho^2 + dz^2) + \frac{\rho^2}{(\rho^2+1)^2} d\phi^2. \qquad (17)$$

Максимум в плотности энергии ϵ также как и в T_0^0 достигается на оси, когда $\rho = 0$. Таким образом, незаряженная материя будет в самосогласованном магнито-гравитационном поле собираться и концентрироваться вблизи оси.

Для случая пылевидной материи $a = 0$, уравнение (12) имеет только нулевое решение $\tilde{\epsilon} = 0$. Таким образом, пылевидная материя не может быть захвачена магнито-гравитационным полем. В случае $a = 1$ из (11) и (12) получаем

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0\, e^{2n\sigma}, \qquad (18)$$

$$e^{F_1} = \frac{n}{\mathrm{ch}\, n\sigma}, \quad e^{F_3} = e^{n\sigma}\, \mathrm{ch}\, n\sigma, \quad e^{F_0} = \mathrm{ch}\, n\sigma\, \exp\left(n\sigma + \frac{\epsilon_0}{2n^2} e^{2n\sigma}\right). \qquad (19)$$

Плотность энергии для материи в этом случае равна

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{n^2}\frac{H_0^2}{8\pi}\frac{1}{(\mathrm{ch}\, n\sigma\, e^{n\sigma})^2}\exp(-\frac{\epsilon_0}{n^2}e^{2n\sigma}) = \frac{\epsilon_0}{n^2}\frac{H_0^2}{2\pi}\frac{1}{(\rho^2+1)^2}\exp(-\frac{\epsilon_0}{n^2}\rho^2) \quad (20)$$

и для электромагнитного поля

$$-T_0^0 = \frac{H_0^2}{8\pi}(\mathrm{ch}\, n\sigma\; e^{n\sigma})^{-4}\exp(-\frac{\epsilon_0}{n^2}e^{2n\sigma}) = \frac{2H_0^2}{\pi}(\rho^2+1)^{-4}\exp(-\frac{\epsilon_0}{n^2}\rho^2)\,. \quad (21)$$

Метрика для $a = 1$ приводится к виду

$$ds^2 = (\rho^2+1)^2\exp(\frac{\epsilon_0}{n^2}\rho^2)(-dt^2+d\rho^2) + (\rho^2+1)^2 dz^2 + \frac{\rho^2}{(\rho^2+1)^2}d\phi^2\,. \quad (22)$$

Получился любопытный результат: наличие нейтральной материи с магнито-гравитационной вселенной уменьшает ее характерный размер согласно (20) и (21) в $\sqrt{\epsilon_0}$ раз, где ϵ_0 есть отношение плотности материи к плотности электромагнитного поля на оси системы (очевидно, константа n может быть выбрана равной единице). Таким образом, магнитная энергия будет концентрироваться в узкой области малых значений ρ. Представляется более не менее очевидным, что этот результат будет иметь место также для случая любого другого уравнения состояния с неравным единице значением параметра a.

В связи с этим возникает вопрос, не являются ли квазары магнито-гравитационными образованиями? Или не являлись ли они таковыми в начальной стадии их эволюции? Высказываемое против этого возражение [1] основано на данных Линдса'а и Сандейжа [4], которые для квазара М 82 дают значение характерного магнитного поля в некоторой эффективной области $2 \cdot 10^{-6}$ *гс*. Для объяснения же наблюдаемых размеров квазаров необходимы поля порядка 10^2 *гс*. Однако, наличие материи, как мы видели, существенным образом уменьшает характерный размер, точнее связь характерного размера с магнитным полем.

Возможно также, что магнитное поле планет есть остаток некоторого первобытного магнитного поля, удерживаемый гравитационным полем немагнитной материи планет.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
26 декабря 1966 г.

Литература

[1] M.A. Melvin, Phys.Rev., 139, B 225, 1965.
[2] K. Thorne, Phys.Rev., 139, B 244, 1965.

[3] Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 41, 1609, 1961.
[4] C. Lynds , A.Sandayge, Astrophys.J., 137, 1005, 1963.

---

* Уравнение состояния с $\alpha = 1$ может иметь место для системы частиц, взаимодействие которых неперенормируемого в квантовой теории поля. В этом случае гамильтониан взаимодействия содержит производные и константа взаимодействия содержит параметр l, имеющий размерность длины. Тогда, если характеризовать состояние системы температурой T, то мы будем иметь в своем распоряжении безразмерный параметр $\hbar c/kTl$. Включая его в зависимость энергии и давления от температуры, мы сможем иммитировать уравнение состояния $\epsilon = p$ (см. также [3]).

** Очевидно, что в первом приближении наша метрика совпадает с метрикой [1], так как при этом обратное влияние материи на метрику не учитываем.