К ТЕОРИИ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ

А.Ф.Андреев

Как было показано Лондоном [1], в сверхпроводнике под действием электрического тока, превышающего критическое значение $i_{c\,0} = cH_cR/2$ (H_c – критическое магнитное поле, R – радиус образца), возникает периодическая структура (промежуточное состояние), один период которой изображен на рис.1. Использованное в [1] макроскопическое описание, соответствующее условию $\theta \to 0$, дает возможность вычислить сопротивление образца, но не позволяет найти величину угла θ. При этом остается неясной точность макроскопического описания. В настоящей работе вычислен угол θ и найдены обусловленные его конечностью поправки к величине критического тока и сопротивлению*.

Если ввести цилиндрическую систему координат (r, ϕ, z) так, как показано на рис.1, то из соображений симметрии ясно, что единственной отличной от нуля компонентой магнитного поля является $H_\phi(r, z) \equiv H$.

В нормальной фазе она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) - \frac{H}{r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

В области $r \leqslant x$, $|z| \leqslant r\theta$ решение удобно искать в виде разложения по малому отношению z^2/r^2:

$$H = f_0(r) + \frac{z^2}{2r^2} f_2(r).$$

Из (1) имеем тогда $f_2 = f_0 - r\partial/\partial r(r\,\partial f_0/\partial r)$. На границе раздела нормальной и сверхпроводящей фаз, т.е. при $z = \pm\theta r$ H должно равняться H_c или

$$f_0 + \frac{\theta^2}{2}\left\{f_0 - r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_0}{\partial r}\right)\right\} = H_c$$

При малых θ решением последнего уравнения является $f_0 = H_c(1 - \theta^2/2)$ и, таким образом,

$$H = H_c\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{z^2}{2r^2}\right), \tag{2}$$

В области $r > x$ для поля $\overline{H}$, усредненного по z, из (1) получаем уравнение $\partial/\partial r(r\partial\overline{H}/\partial r) - \overline{H}/r = 0$, откуда $\overline{H} = a/r + \beta r$ (a, β – постоянные). Условие непрерывности $\overline{H}$ при $r = x$ дает

$$\frac{a}{x} + \beta x = H_c\left(1 - \frac{\theta^2}{3}\right). \tag{3}$$

Мы учли, что $\overline{H} = (H_c r/x)(1 - \theta^2/3)$ при $r < x$, как это легко видеть из (2) и из того, что $H = 0$ в сверхпроводящей фазе.

Разность $H - \overline{H}$ в области $r > x$ быстро убывает с ростом r и, поскольку всегда выполнено неравенство $R - x >> \theta x$ (это видно из результата), практически всюду при $r > x$ можно считать $H = \overline{H}$.

Магнитное поле на поверхности образца должно быть равно $2j/cR$ (j – полный ток). Отсюда получаем

$$\frac{a}{R} + \beta R = 2j/cR. \tag{4}$$

Если $\theta = 0$, то из (3) и (4) следует $a = a_0 \equiv H_c x_0/2$, $\beta = \beta_0 \equiv H_c/2x_0$, $x_0/R = j/j_{co} - \sqrt{j^2/j_{co}^2 - 1}$. При малых θ, положив $a = a_0 + \delta a$,

$\beta = \beta_0 + \delta\beta$, $x = x_0 + \delta x$ и линеаризуя уравнения (3) и (4) относительно величин δa, $\delta\beta$, δx получим:

$$\delta a = -\frac{R^2 x_0}{R^2 - x_0^2} H_c \frac{\theta^2}{3}, \quad \delta\beta = \frac{x_0}{R^2 - x_0^2} H_c \frac{\theta^2}{3}. \qquad (5)$$

При заданном значении тока j должен стремиться к своему минимальному возможному значению термодинамический потенциал, плотность которого $\tilde{\Phi} = \Phi - HB/4\pi$ [3]**. Если отсчитывать Φ от значения, соот-

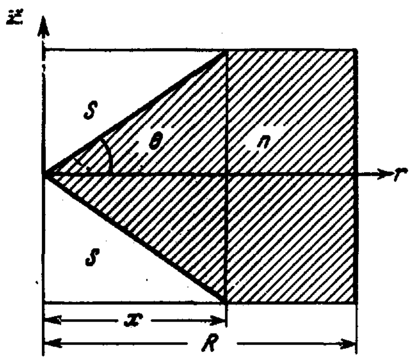

Рис.1

ветствующего сверхпроводящей фазе ($\Phi_s = 0$), то в нормальной фазе $\Phi_n = (H_c^2 + H^2)/8\pi$.

Полный термодинамический потенциал равен сумме $\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3$, где

$$\tilde{\Phi}_1 \equiv \int_x^R 2\pi r\,dr \frac{1}{8\pi}\{H_c^2 - (\frac{a}{r} + \beta r)^2\} = \frac{H_c^2}{8}(R^2 - x^2) - \frac{1}{4}\{a^2 \ln\frac{R}{x} +$$

$$+ a\beta(R^2 - x^2) + \frac{\beta^2}{4}(R^4 - x^4)\}, \qquad (6)$$

$$\tilde{\Phi}_2 \equiv \frac{1}{2x\theta}\int_0^x \frac{r\,dr}{4}\int_{-r\theta}^{r\theta} dz\{H_c^2 - H_c^2(1 - \theta^2 + \frac{z^2}{r^2})\} = \frac{H_c^2}{18}\theta^2 x^2; \qquad (7)$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \frac{H_c^2}{8\pi}\Delta 2\pi x^2 \frac{1}{2x\theta} = \frac{H_c^2}{8}\frac{x\Delta}{\theta}. \qquad (8)$$

Последний член связан с поверхностным натяжением на границе фаз, величина которого, как обычно, записана в виде $H_c^2\Delta/8\pi$. Постоянную, равную потенциалу поля вне образца, всюду опускаем.

Используя равенства (5), можно легко выделить из $\tilde{\Phi}_1$ зависящую от θ часть:

$$\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}^{(0)} + \frac{H_c^2 R^2}{12}\theta^2 \left\{ \frac{x_0^2/R^2}{1 - x_0^2/R^2} \ln\frac{R}{x_0} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{x_0^2}{R^2} \right\}, \qquad (9)$$

где $\tilde{\Phi}^{(0)}$ не зависит от θ. При $(j - j_{co})/j_{co} \ll 1$ имеем

$$\tilde{\Phi}^{(0)} = -\frac{H_c^2 R^2}{12}\left(2\frac{J - J_{co}}{J_{co}} \right)^{3/2}. \qquad (10)$$

Путем минимизации суммы выражений (7), (8) и (9) находим равновесное значение θ:

$$\theta = \left[\frac{\Delta}{R\Psi(j/j_c)} \right]^{1/3}, \qquad (11)$$

где

$$\Psi(j/j_c) = \frac{4R}{3x_0}\left\{ \frac{x_0^2/R^2}{1 - x_0^2/R^2}\ln\frac{R}{x_0} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{x_0^2}{R^2} \right\} + \frac{8}{9}\frac{x_0}{R}.$$

При j, близком к j_{co}, $\theta = (9\Delta/8R)^{1/3}$. При больших ($j \gg j_{co}$) значениях тока $\theta = (3\Delta j_{co}/2RJ)^{1/3}$.

Если бы весь образец находился в сверхпроводящем состоянии, то, как ясно из сказанного выше, термодинамический потенциал был бы равен нулю. Поэтому критический ток определяется из условия равенства нулю суммы выражений (7), (8) и (9). Используя (10), найдем поправку к j_{co}, связанную с конечностью θ:

$$\frac{j_c - j_{co}}{j_{co}} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^{2/3}\left(\frac{\Delta}{3R}\right)^{4/9}. \qquad (12)$$

Поправку к сопротивлению W легко определить, если заметить, что постоянная β связана с z – компонентой электрического поля соотношением $\beta = 2\pi\sigma E_z/c$ (σ – проводимость нормальной фазы). Имеем:

$$\frac{W}{W_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{J_{co}^2}{J^2}}\right) + \frac{j_{co}}{j}\frac{x_0 R}{R^2 - x_0^2}\frac{\theta^2}{3}, \qquad (13)$$

где W_n – сопротивление в нормальном состоянии. Напишем еще выражение для скачка сопротивления W_c при $j = j_c$. Из (12) и (13) находим

$$\frac{W_c}{W_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{\Delta}{3R}\right)^{2/9}. \tag{14}$$

На рис.2 проведено сравнение зависимости $W_c\,(R)$, даваемой формулой (14) с экспериментальными данными Майсснера [4] для олова. При вычислениях мы подставляли значение $\Delta \approx 1\cdot 10^{-4}$ *см*, что соответст-

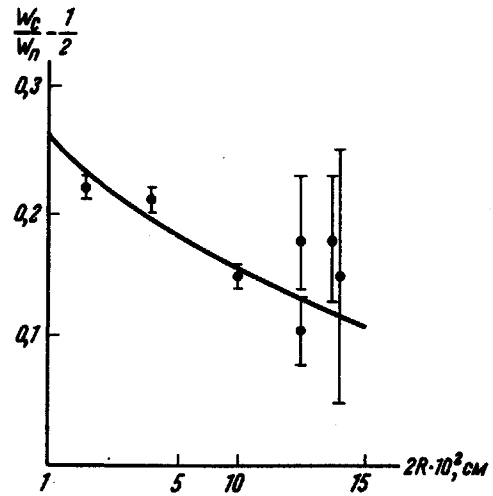

Рис.2

вует (см. [5]) средней использованной в [4] температуре $T \approx 3{,}5°$. Согласие теории с экспериментом оказалось даже лучше, чем это можно было ожидать.

Отметим еще, что поправки к величине критического тока значительно меньше, чем к W_c. Этот факт также согласуется с экспериментом.

Выражаю благодарность А.А.Абрикосову, Л.П.Питаевскому и Ю.В.Шарвину за полезное обсуждение.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24 августа 1967 г.

Литература

[1] F.London. Superfluids, 1, New York, 1950.
[2] C.G.Kuper. Phil. Mag., 43, 1264, 1952.
[3] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.

[4] H.Meissner. Phys. Rev., 109, 668, 1958.
[5] Ю.В.Шарвин. ЖЭТФ, 33, 1341, 1957.

---

* Купер [2] пришел к выводу о том, что $\theta \sim 1$ и потому макроскопическое описание по существу невозможно. Мы увидим, однако, что этот вывод ошибочен, так как в действительности $\theta \ll 1$.

** Предполагается, что проводимость σ не слишком мала так, что можно пренебречь неравновесностью, связанной с выделением джоулева тепла.