Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 4, стр. 219 – 221 *20 февраля 1973 г.*

О ВОЗМОЖНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

В. Л. Покровский

Показано, что плотность числа частиц и плотность энергии являются линейными комбинациями величин, имеющих определенные масштабные размерности вблизи критической точки жидкость – пар. Предлагается проверить важное следствие гипотезы конформной инвариантности – ортогональность величин разных масштабных размерностей, т. е. обращение в нуль парного коррелятора таких величин.

Гипотеза конформной инвариантности (КИ) в теории фазовых переходов была выдвинута А.М.Поляковым [1]. До сих пор казалось, что экспериментально измеряемые термодинамические величины не могут дать никаких сведений о конформной инвариантности флуктуационного поля $\phi(x)$. Эксперименты по рассеянию также не годятся для проверки КИ, так как они дают сведения лишь о парной корреляционной функции $< \phi(x)\ \phi(x') >$. Между тем, вид этой корреляционной функции однозначно определяется из соображений однородности изотропии и масштабной инвариантности. Измерение тройных корреляторов, вид которых определяется КИ, вряд ли возможно.

Важным следствием КИ является соотношение "ортогональности" для величин O_1 и O_2, имеющих разные масштабные размерности $\Delta_1 \neq \Delta_2$:

$$<< O_1 O_2 >> \equiv < O_1 O_2 > - < O_1 > < O_2 > = 0 \qquad (1)$$

Чтобы выяснить возможность проверки соотношения (1), мы проведем размерный анализ физических величин вблизи критической точки жидкость-пар.

Прежде всего отметим важное отличие реальной жидкости-газа от модели решеточного газа (см., например, [2]). В решеточном газе флуктуации энергии E и числа частиц N статистически независимы на критической изохоре

$$< \Delta N\ \Delta E > |_{V = V_c} = 0 \qquad (2)$$

Это равенство связано со специальной симметрией решеточной модели. Известно, что эта модель изоморфна модели Изинга. Равенство (2) является аналогом очевидного соотношения:

$$< \Delta M\ \ \Delta E > |_{h=0} = 0\,, \qquad (3)$$

где M – полный момент, h – магнитное поле в модели Изинга. В реальной системе жидкость – пар ΔN и ΔE не независимы:

$$< \Delta N\ \Delta E > = \left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{V,T} < (\Delta N)^2 > = \left[\mu + Ts - Tv\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right]\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}. \qquad (4)$$

Здесь μ – химический потенциал, s – энтропия, v – объем, рассчитанные на одну частицу. Величина в квадратной скобке на критической изохоре отнюдь не равна нулю.

Равенство (4) означает, что ΔE является столь же сильно флуктуирующей величиной как и ΔN. Пусть O_1, O_2 – два сингулярных аддитивных оператора с определенными положительными размерностями Δ_1, Δ_2. Последнее означает

$$< O_i^n > \sim V r_c^{-n\Delta_i - 3} \qquad (\Delta_1 < \Delta_2 < 0) \tag{5}$$

Здесь r_c – радиус корреляции. Предположим также, что размерности других операторов алгебры флуктуирующих величин $\Delta_k > \Delta_2$ $(k = 3, 4...)$. Представим ΔE и ΔN в виде линейной комбинации операторов алгебры, пренебрегая всеми величинами, кроме O_1, O_2:

$$\begin{aligned} \Delta N &= a O_1 + b O_2 \\ \Delta E &= a' O_1 + b' O_2 \end{aligned} \tag{6}$$

В главном порядке такие термодинамические величины как сжимаемость, термический коэффициент объемного расширения и теплоемкость $C_{V\mu}$ определяются флуктуациями $< O_1^2 >$ величины O_1 и пропорциональны друг другу. Экспериментально измеряемой величиной является теплоемкость C_{VN}, а не $C_{V\mu}$. Удивительно, что сингулярность C_{VN} связана с флуктуациями O_2, а не O_1! В самом деле, выразим C_{VN} с помощью потенциала $\Omega = -pV$:

$$C_{VN} = T \frac{\Omega_{\mu T}^2 - \Omega_{\mu\mu}\Omega_{TT}}{\Omega_{\mu\mu}} \tag{7}$$

(индексы μ и T у Ω означают дифференцирование). Вторые производные от Ω равны флуктуационным средним значениям:

$$\Omega_{\mu\mu} = - < (\Delta N)^2 >; \quad \Omega_{TT} = - < (\Delta \tilde{E})^2 >; \quad \Omega_{\mu T} = - < \Delta\tilde{E} \cdot \Delta N >$$
$$\tilde{E} = E - \mu N . \tag{8}$$

Подставляя (8) и (6) в (7), находим, что коэффициенты при $< O_1^2 >$ и $< O_1 O_2 >$ в C_{VN} тождественно обращаются в нуль[1)], и в первом неисчезающем приближении

$$C_{VN} = \frac{(ab' - a'b)^2}{a^2} < O_2^2 > \tag{9}$$

Сингулярность C_{VN} оказалась слабой по сравнению с C_{pN} и сжимаемостью, как и в модели решеточного газа и в экспериментах [4].

Воспользуемся известным соотношением

$$\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p = 0 \tag{10}$$

[1)] Аналогичное сокращение происходит в случае λ-точки He (см. [3]).

Из него в частности следует, что $(\partial p/\partial T)_n$ в критической точке принимает конечное значение:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n = \left(s_c - \frac{a'}{a}\right) n_c \qquad (11)$$

Заменим в левой части (10) величину $(\partial p/\partial T)_n$ ее значением (11) в критической точке. Полученная величина уже не обращается тождественно в ноль, но главные сингулярности $\sim < O_1^2 >$ вычитаются. После простых выкладок, находим:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{C_T} + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p = \left[(s_c - s)a^2 + \frac{n - n_c}{n} a a'\right] < O_1^2 > +$$

$$+ \frac{ab' - a'b}{a} < O_1 O_2 > + \frac{b}{a}(ab' - a'b) < O_2^2 > .$$

По размерности $< O_1^2 > \sim \tau^{-\gamma}$, $< O_2^2 > \sim \tau^{-\alpha}$, $s_c - s \sim \tau^{1-\alpha}$.

Наконец, $< O_1 O_2 > \sim \sqrt{< O_1^2 > < O_2^2 >} \sim \tau^{-(\alpha+\gamma)/2}$, если это среднее отлично от нуля. Полагая $\gamma \approx 1{,}25$, $\alpha \approx 0{,}12$, находим, что порядок величины (12) ($\sim \tau^{-0{,}7}$) определяется вторым слагаемым, если $< O_1 O_2 > \neq 0$. В противном случае главным является первое слагаемое ($\sim \tau^{-0{,}4}$). Измерения должны быть проведены вдоль изохоры, очень близкой к $n = n_c$, иначе слагаемое с $< O_1^2 >$ окажется более существенным. Относительная погрешность измерения всех величин не должна превосходить $\tau^{-(\gamma-\alpha)/2} \sim \tau^{-0{,}5}$.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25 декабря 1972 г.

Литература

[1] А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 12, 538, 1970.

[2] М.Фишер. Природа критических явлений. М., изд. Мир.

[3] Э.Г.Батыев, А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. ЖЭТФ, 47, 598, 1964.

[4] М.Н.Багацкий, А.В.Воронель, В.Г. Гусак. ЖЭТФ, 43, 728, 1962.
В.Л.Покровский. УФН, 94, 127, 1968.