Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 5, стр. 202 – 205 *10 марта 1984 г.*

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

В.Г.Книжник, А.Ю.Морозов

Вычислен вклад инстантонов в перенормировку коэффициента перед плотностью топологического заряда в эффективном лагранжиане. Обсуждается связь с квантовым эффектом Холла.

Эффективные лагранжианы некоторых физических теорий могут содержать плотность топологического заряда (ТЗ). В таких теориях существуют квантовые флуктуации инстантонного типа, которые "оживляют" ТЗ и, кроме того могут приводить к его перенормировке. Ниже мы обсудим этот вопрос в приближении инстантонного газа, имея в виду исключительно качественную сторону дела. Описываемое явление имеет весьма общий характер, однако его феноменологическое значение не вполне ясно. Мы выбрали для обсуждения квантовую глюодинамику, где хорошо известны нужные нам формулы. В конце статьи обсуждается возможное применение в теории квантового эффекта Холла. Мы записываем все формулы в евклидовом пространстве, коэффициент перед ТЗ при этом мнимый.

1. Эффективный лагранжиан $\mathcal{L}(\mu)$, нормированный в точке μ, по определению получается усреднением затравочного лагранжиана по квантовым флуктуациям с виртуальностями, большими μ, т. е. по пертурбативным флуктуациям с $q^2 > \mu^2$ и по непертурбативным (инстантонным и пр.) с размерами $\rho < 1/\mu$. Мы отложим пока обсуждение физического смысла $\mathcal{L}(\mu)$ и займемся выяснением его зависимости от μ. Эффективный лагранжиан глюодинамики имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu) = \frac{1}{4g^2(\mu)} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} + \frac{i\theta(\mu)}{32\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^a_{\mu\nu} . \tag{1}$$

Чтобы получить $\mathcal{L}(\mu' < \mu)$ надо разделить в (1) поля с виртуальностями бо́льшими и меньшими μ', т. е. представить G в виде суммы $G_{\text{кв}}$ (виртуальности между μ' и μ (и $G_{\text{кл}}$) виртуальности меньше μ'), а затем проинтегрировать по $G_{\text{кв}}$. Интегрирование только по пертурбативным флуктуациям приводит к соотношениям:

$$1/g^2(\mu') = 1/g^2(\mu) + \frac{b}{8\pi^2} \ln \frac{\mu'}{\mu} + \ldots , \quad b = \frac{11}{3} N$$
$$\theta(\mu') = \theta(\mu) . \tag{2}$$

Учет инстантонов легко произвести с помощью выражения для инстантонной плотности во внешнем поле $G^a_{\mu\nu}$ [1]:

$$d^G(\rho) = \rho^{-5} d(\rho) \exp\left[-\frac{2\pi^2}{g(\rho)}\rho^2 \bar{\eta}^E_{a\mu\nu} G^a_{\mu\nu}(\rho)\right],$$
$$d(\rho) = C(\rho)\exp(-8\pi^2/g^2(\rho)) . \qquad (3)$$

Соответствующий вклад в перенормировку $\mathcal{L}(\mu)$ получается разложением (3) до второго порядка включительно по $\rho^2 G_{\text{кл}}$ [1)], усреднением по ориентациям инстантонов и интегрированием по $d\rho$ от $1/\mu$ до $1/\mu'$:

$$\frac{1}{\delta(N)} e^{-i\theta} \int_{1/\mu}^{1/\mu'} \frac{d\rho}{\rho} d(\rho)\left(\frac{2\pi^2}{g}\right)^2 (G^2_{\text{кл}} - G_{\text{кл}}\tilde{G}_{\text{кл}}) \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{\mu}{\mu'} D(\mu) e^{-i\theta}(G^2 - G\tilde{G}). \quad (4)$$

Для антиинстантона вместо $e^{-i\theta}(G^2 - G\tilde{G})$ получается $e^{+i\theta}(G^2 + G\tilde{G})$ появление именно этих комбинаций связано с самодуальностью инстантонов. С учетом (4) уравнения "ренормгруппы" (РГ) вместо (2) приобретают вид:

$$1/g^2(\mu') = 1/g^2(\mu) + \frac{b}{2\pi^2}\ln\frac{\mu'}{\mu} - 4\ln\frac{\mu}{\mu'} D(\mu)\cos\theta(\mu), \qquad (5)$$
$$\theta(\mu') = \theta(\mu) - 32\pi^2 \ln\frac{\mu}{\mu'} D(\mu)\sin\theta(\mu); \qquad D(\mu) > 0.$$

Первое из этих уравнений получено впервые Калланом, Гроссом и Дашеном [2]. Подчеркнем, что $D(\mu)$ – степенная функция μ, поэтому (5) не могут рассматриваться как настоящие РГ уравнения, конкретная количественная зависимость $\theta(\mu)$ не универсальна (разная для разных процессов), однако качественный эффект совершенно определенный:

$$\partial\theta/\partial\mu \sim + \sin\theta \qquad (6)$$

т.е. с уменьшением μ $\theta(\mu)$ стремится к целому кратному 2π.

2. Здесь мы прервемся и сделаем важное отступление. Существует интерпретация θ в рамках правила суперотбора [2]. Следует подчеркнуть, что в эффективный лагранжиан входит другая θ. Правило суперотбора утверждает существование θ_0 – вакуума: $|\Omega> = \sum_n e^{in\theta_0}|n>$. ТЗ состояния $|n> = n$. θ_0 при этом является мировой постоянной. Эффективный лагранжиан связан с матричными элементами между $\Omega_{in} = \Omega(t = -\infty)$ и $\Omega_{\text{out}} = \Omega(t = \infty)$. Чтобы оживить θ_0 рассмотрим амплитуду $<\Omega_{\text{out}}|\Omega_{\text{in}}>_Q$ во внешнем поле с ТЗ $= Q$. $<\Omega_{\text{out}}|\Omega_{\text{in}}>_Q = \sum_{m,n} e^{i\theta_0(n-m)} <m|n>_Q \sim \sum_k e^{-i\theta_0 k} <k|0>_Q$.

В пренебрежении инстантонными переходами в этой сумме остается единственный член $e^{-i\theta_0 Q} <Q|0>$. Если же учесть эти переходы, то появятся дополнительные слагаемые:

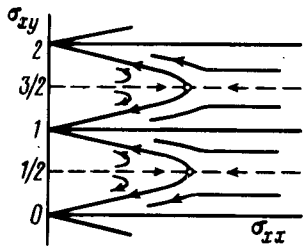
$$e^{-i\theta_0 Q} <Q'|0> \left[1 + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu}{\mu'} D' e^{-iQ_0}(-Q) + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu}{\mu'} D' e^{iQ_0}\cdot Q + \ldots\right]$$
$$\to e^{-i(\theta_0 - \ln\frac{\mu}{\mu'} D'\sin\theta_0)Q}$$

. С точки зрения эффективного лагранжиана матричный элемент в таком внешнем поле содержит фактор $e^{-i\theta Q}$ и видно, что $\theta = \theta_0 - \ln\frac{\mu}{\mu'} D'\sin\theta_0$.

Можно сказать, что θ_0 из правила суперотбора играет роль голой, а θ из эффективного лагранжиана – одетой θ. Поэтому на наш взгляд вывод о перенормируемости согласуется с гамильтоновым подходом.

---

1) Для малости $\rho^2 G_{\text{кл}}$ достаточно, чтобы ρ было много меньше характерного масштаба поля $G_{\text{кл}}$. Это позволяет рассматривать поля $G_{\text{кл}}$ с не нулевым ТЗ и оправдывает удержание ТЗ в (4).



3. Вопрос о физической интерпретации $\theta(\mu)$ из эффективного лагранжиана кажется нам открытым. Напомним, что обычно процессы рассеяния с переданными импульсами q определяются эффективным лагранжианом $\mathcal{L}(q)$, меньшие же виртуальности оказываются несущественными. Однако справедливость этого утверждения для вклада многоинстантонных конфигураций находится под сомнением. Дело осложняется еще и тем, что "оживить" ТЗ в лагранжиане можно лишь в процессах, определяемых непертубативными эффектами. Поэтому нам неясно, может ли описанный эффект дать надежду на объяснение малости *CP*-нарушения при низких энергиях. Во всяком случае подчеркнем, что эффект никоим образом не связан с инстантонами как классическими решениями, существенно лишь допущение флуктуаций с ненулевым ТЗ.

4. Ситуацией, чистой с точки зрения подхода, основанного на введении эффективного лагранжиана, является теория поля при конечных температуре или объеме. Тогда обрезание инстантонных флуктуаций происходит на размерах ящика или обратной температуре. Пример подобной ситуации существует в физике твердого тела.

В одном из вариантов теории квантового эффекта Холла [3] нормальная – σ_{xx} и холловская – σ_{xy} проводимости двумерной пленки с локализацией определяются в единицах $e^2/2\pi\hbar$ как параметры в эффективном лагранжиане некоторой, асимптотически свободной $2D$ σ-модели:

$$\mathcal{L} = \sigma_{xx}\,\mathrm{Tr}\,(\partial_\mu \tilde{Q})^2 + i\sigma_{xy}\,P(\tilde{Q}). \tag{7}$$

Здесь $P(Q)$ – плотность ТЗ, конкретный вид которой для нас несущественен. Значения σ_{xy} отличающиеся на целое число эквивалентны. Затравочные σ_{xx} и σ_{xy} заданы на атомных расстояниях (при этом $\sigma_{xy} \sim$ (магнитное поле) $^{-1}$), а наблюдаемые проводимости – параметры лагранжиана (7), нормированного в точке $\mu \sim 1/L$, L – размер образца. Экспериментально σ_{xy} стремится с ростом L к целым значениям. Для объяснения этого факта Хмельницкий предположил [4], что уравнения РГ для σ_{xx} и σ_{xy} имеют неустойчивые особые точки. На рисунке изображен получающийся при этом фазовый портрет уравнений РГ в плоскости σ_{xx}, σ_{xy}. (Отметим, что для инфракрасной области в [4] был проделан специальный анализ). Стрелки указывают направление увеличения L. В рамках нашего подхода эта гипотеза получает свое естественное подтверждение, поскольку уравнения для σ_{xx} и σ_{xy} аналогичные (5) имеют вид

$$\begin{aligned} \partial\sigma_{xx}/\partial L &= \beta(\sigma_{xx}) - \gamma D(\sigma_{xx})\cos(2\pi\sigma_{xy}), \\ \partial\sigma_{xy}/\partial L &= -\gamma' D(\sigma_{xx})\sin(2\pi\sigma_{xy}), \end{aligned} \tag{8}$$

где $D(\sigma_{xx})$, $\beta(\sigma_{xx})$ – соответственно инстантонная плотность и β – функция в этой модели, γ и γ' – положительные постоянные. В последних экспериментах [5] при понижении температуры и увеличении магнитного поля было обнаружено, что квантованное значение σ_{xy} может быть и дробным: 1/3, 1/5, ... Возможно, что этот эффект связан с взаимодействием и статистикой электронов. В этом случае он не обязан иметь место в упрощенной модели (7). Не исключено однако, что явление может быть объяснено и в рамках этой модели, если каким-то образом учесть кулоновское взаимодействие электронов.

Мы признательны М.Б.Волошину, В.И.Захарову, В.А.Новикову, Д.Е.Хмельницкому и М.А.Шифману за обсуждение затронутых выше вопросов.

Литература

1. *Вайнштейн А.И., Захаров В.И., Новиков В.А., Шифман М.А.* УФН, 1982, **136**, 553.
2. *Callan C.G., Dashen R., Gross D.J.* Phys. Rev., 1978, **D17**, 2717.
3. *Levine H., Libby S.B., Pruisken A.M.M.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 1915.
4. *Хмельницкий Д.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1983, **38**, 454.
5. *Tsui D.C., Stormer H.L., Gossard A.C.* Phys. Rev. Lett., 1982, **48**, 1559.

Московский
физико-технический институт

Поступила в редакцию
19 декабря 1983 г.