МЕТОД СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ МОД В ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Н.Г.Попков

Численным путем показана возможность перехода любого начального возмущения в плазме с ограниченным электронным пучком в собственное решение. Рассмотрены физические причины установления такого решения и условия применимости метода собственных и несобственных мод в теории плазменно-пучковой неустойчивости ограниченных электронных пучков.

Важной проблемой физики плазменно-пучковой неустойчивости является вопрос о влиянии поперечных геометрических размеров пучка на инкремент неустойчивости. Одним из эффективнейших методов исследования этой задачи является метод несобственных функций, предложенный в [1]. Недостатком этого метода является то, что для достижения полноты и ортогональности волновых функций, используемых там, необходимо соблюдать условие $\Delta_0 q \gg 1$, где Δ_0 – ширина волнового пакета, а q – характерное поперечное волновое число. Данный недостаток особенно очевиден в связи с тем, что максимальный инкремент плазменно-пучковая неустойчивость достигает для возмущений с $q = 0$.

В настоящей работе делается попытка обойти этот недостаток и рассмотреть эволюцию начальных возмущений с $q = 0$.

Согласно [1] исходным уравнением, описывающим ленгмюровские колебания плазмы плотности n_0 под действием пространственно-ограниченного электронного пучка без магнитного поля, является:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\,\frac{C_s^2}{2\omega_0}\Delta_\perp\right)(\Delta_\perp - k_z^2)\,\Psi = -2\pi\omega_0\,\frac{e^{*2}}{m}\,\frac{2}{V_T^2}\left(i + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right) n_b \Psi, \qquad (1)$$

где ω_0 – плазменная частота, e^* – заряд электрона, m – его масса, C_s – скорость звука в плазме, V_T – тепловой разброс в скоростях электронов пучка, n_b – плотность пучка электронов, которую мы выбираем в виде: $n_b = n_{b_0} \exp\{-(r^2/2\Delta_b^2)\}$ (цилиндрический пучок с гауссовым профилем плотности). При получении (1) полагалось, что пучок распространяется вдоль оси z и поэтому возмущение потенциала выбиралось в виде:

$$\Psi = \Psi(t, r)\exp\left\{-i\omega_0 t - i\,\frac{C_s^2}{2\omega_0}k_z^2 t + ik_z z\right\}$$

во всех дальнейших расчетах полагалось, что $k_z = \omega_0/V$, где V – направленная скорость электронов пучка. Решать уравнение (1) будем методом начальных возмущений, т.е. поставим задачу Коши для уравнения (1):

$$\Psi(t = 0,\ r) = \Psi_0(r). \qquad (2)$$

В силу цилиндрической симметрии пучка, естественно, начальные возмущения также выбирать цилиндрически симметричными. Для решения (1) с начальным условием (2) разложим $\Psi(t, r)$ в ряд по функциям Лягерра:

$$\Psi(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\Psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) L_n(r^2/\Delta_0^2)\exp\{-(r^2/2\Delta_0^2)\}, \qquad (3)$$

где Δ_0 – произвольный параметр, а L_n – полиномы Лягерра. Подставляя (3) в уравнение (1) и начальное условие (2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $a_n(t)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \frac{da_m}{dt} = \sum_{K=0}^{\infty} V_{n,K}\, a_K \tag{4}$$

с начальными условиями:

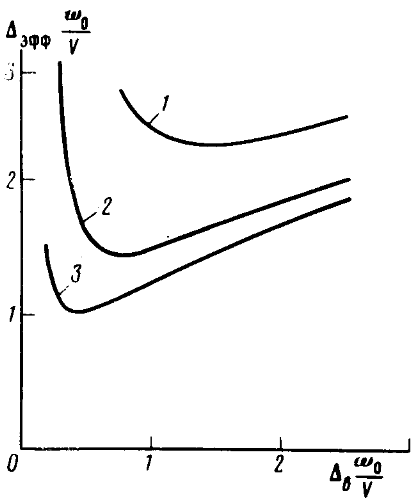
$$a_n(t=0) = a_{n0}\ , \tag{5}$$

где $A_{n,m}$ – трехдиагональная матрица:

$$A_{n,m} = \int_0^{\infty} \Psi_n (\Delta_\perp - k_z^2)\Psi_m\, dr^2,$$

а матрица $V_{n,m}$ соответственно равна:

$$V_{n,m} = \int \Psi_n \left\{ i\frac{C_s^2}{2\omega_0}\Delta_\perp(\Delta_\perp - k_z^2) - 2\pi\omega_0 \frac{e^{*2}}{m}\frac{2}{V_T^2}\left(i + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right) n_b(r)\right\}\Psi_m dr^2.$$



Зависимость ширины собственной функции Δ_{eff} от радиуса пучка Δ_b для различных параметров $\kappa = \frac{C_s^2\ V_T^2\ n_0}{V^4 n_{b0}}$: 1 – $\kappa = 1,5$; 2 – $\kappa = 3\cdot 10^{-1}$; 3 – $\kappa = 6\cdot 10^{-2}$

Система (4) с начальными условиями (5) интегрировалась численно. При выборе начальных условий все a_{n0} полагались равными нулю, кроме a_{00} (Гауссов пакет), а число функций Ψ_n – ограничивалось 10 – 12 (так как в процессе счета амплитуда 10 – 12 функции оказывалась на 4 – 5 порядков меньшей, чем амплитуда 0-функции). При исследовании решений (4) в широком интервале параметров плазмы и пучка, обнаружилась сходимость решения задачи (4) – (5) к собственному решению. Физический смысл такого решения легко понять из следующих рассуждений. Любое начальное возмущение типа Гауссова пакета, размеры которого много меньше поперечных размеров пучка, должно неограниченно „расплываться" из-за наличия дисперсии. В обратном предельном случае, т.е. когда ширина пучка много меньше ширины возмущения, росту под действием плазменно-пучковой неустойчивости подвергается лишь часть возмущения, находящаяся в зоне пучка, остальная часть возмущения практически не испытывает его воздействия. Это приводит к тому, что несмотря на наличие дисперсии эффективные размеры возмущения уменьшаются. Конкуренция этих процессов приводит к образованию равновесного возмущения, которое с течением времени не меняет своей формы, а как целое растет под действием пучка. Естественно такое возмущение считать собственным решением уравнение (1). На рисунке показан график зависимости эффективной ширины Δ_{eff} равновесного возмущения от радиуса пучка Δ_b, причем:

$$\Delta^2_{eff} = \frac{1}{2\Psi^*(0)\Psi(0)} \int_0^\infty \Psi^*(r)\, \Psi(r)\, dr^2. \qquad (6)$$

Видно, что при $\Delta_b \to 0$, $\Delta_{eff} \to \infty$. Причина этого явления лежит в том, что с уменьшением Δ_b падает „мощность" пучка и, как следствие этого, его способность сжимать возмущение. Отсюда следует, что в том случае, когда $\Delta_{eff} \gg \Delta_b$ и инкремент собственной функции мал, при рассмотрении плазменно-пучковой неустойчивости следует пользоваться методом начальных возмущений в духе [1,2]; в том же случае, когда $\Delta_{eff} \lesssim \Delta_b$, достаточно рассмотреть поведение собственной функции. За шириной собственной функции следует следить и в том случае, когда исследуется влияние на инкремент плазменно-пучковой неустойчивости неоднородностей плазмы, находящихся вне пучка, (см., например, [3]).

В заключение автор приносит глубокую благодарность А.А.Иванову за интерес к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Азарова О.Н., Иванов А.А., Левадный Г.Б.* ДАН СССР, 1983, 269, 93.
2. *Мазур В.А., Михайловский А.Б., Френкель А.Л., Шухман И.Г.* Сб. Вопросы теории плазмы. Под ред. Леонтовича М.А. М.: Атомиздат 1979, вып.9, стр.233.
3. *Ерохин Н.С., Моисеев С.С.* Сб. Вопросы теории плазмы. Под ред. Леонтовича М.А. М.: Атомиздат 1973, вып.7, стр. 146.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
10 января 1984 г.