Письма в ЖЭТФ, том 39, вып.5, стр. 225 – 228 *10 марта 1984 г.*

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце

Для описания нелинейных низкочастотных колебаний в плазме токамака и других систем с сильным магнитным полем предлагается упрощенная система уравнений гидродинамического типа, справедливая при произвольном отношении поперечного масштаба неоднородности к ларморовскому радиусу ионов. Обсуждаются некоторые общие свойства этой системы и дается оценка аномальных коэффициентов электронной теплопроводности и диффузии плазмы.

Как показали эксперименты, в плазме токамака, удерживаемой и стабилизируемой сильным магнитным полем, всегда присутствует сложная активность коллективного характера. Она проявляется в наличии низкочастотных колебаний конечной амплитуды и в аномально высоких значениях диффузии и электронного теплопереноса. Для описания этих явлений удобно использовать упрощенные уравнения, в которых явно учитывается наличие очень сильного магнитного поля. В рамках магнитной гидродинамики такие уравнения были получены авторами [1] путем разложения МГД уравнений по обратным степеням продольного магнитного поля B_0. Эти уравнения оказались очень удобными для описания целого ряда коллективных явлений в плазме токамака: перезамыкание магнитного поля на моде $m = 1$ [2], нелинейные тиринг-моды и неустойчивость срыва [3 - 8]. Однако для нахождения диффузии и теплопроводности, обусловленных мелкомасштабной турбулентностью, этих уравнений недостаточно и требуется их обобщение на масштабы, значительно меньшие среднего ларморовского радиуса ионов ρ_i.

Чтобы получить уравнения нелинейной динамики в сильном магнитном поле, мы явно учтем, что продольная компонента магнитного поля B_0 значительно больше поперечной $B_\perp$. Геометрию токамака мы смоделируем прямым цилиндром длины $L = 2\pi R$, где R – большой радиус тора. Ось z системы координат направим по B_0. Поле B_0 остается практически постоянным при медленных течениях плазмы малого давления, поэтому условие $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ сводится к $\mathrm{div}\mathbf{B}_\perp = 0$ и позволяет ввести функцию тока ψ:

$$\mathbf{B}_\perp = [\mathbf{e}_z \nabla\psi], \tag{1}$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор вдоль оси z. В соответствии с (1) электрическое поле можно представить в виде

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi + \frac{\mathbf{e}_z}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \, . \tag{2}$$

Чтобы найти уравнение для ψ, воспользуемся дрейфовым кинетическим уравнением для электронов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\|}(\mathbf{b}\nabla)f + \frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z \nabla\phi]\nabla f + \frac{e}{m}\left(\mathbf{b}\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\frac{\partial f}{\partial v_{\|}} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B_0$. В токамаке функция распределения f близка к максвелловской f_0, поэтому можно положить $f = f_0 + \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ – мала, и поэтому относительно нее уравнение (3) можно линеаризовать. Уравнение для ψ можно получить умножением (3) на $v_\|$ и интегрированием по $v_\|$.

Уравнение для $\widetilde{f}$ решается стандартным методом фурье-преобразования и дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c\,\frac{\mathbf{B}}{B_0}\left(\nabla\phi - \frac{\nabla p_e}{en}\right) + \frac{c^2\hat{\eta}}{4\pi}\Delta_\perp\psi, \tag{4}$$

где $\hat{\eta}$ представляет собой бесстолкновительное удельное сопротивление плазмы, которое в фурье-представлении находится из соотношения:

$$\eta^{-1}_{\mathbf{k}\omega} = \sigma_{\mathbf{k}\omega} = -i\,\frac{e^2 n\omega}{T_e k_\parallel}\left\{1 + \frac{\omega}{k_\parallel v_e} Z\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_e}\right)\right\}. \tag{5}$$

Здесь $v_e = \sqrt{2T_e/m}$, m – масса электрона, Z – так называемая дисперсионная функция [8]. Так как в дальнейшем нам потребуется только действительная часть $\hat{\eta}$, то приближенно положим:

$$\hat{\eta} \cong \mathrm{Re}\,\hat{\eta} \approx \begin{cases} \dfrac{mk_\parallel v_e}{e^2 n} & \text{при} \quad \omega^2 \leqslant k_\parallel^2 v_e^2, \\[2ex] 0 & \text{при} \quad \omega^2 > k_\parallel^2 v_e^2, \end{cases} \tag{6}$$

где $k_\parallel$ – характерное среднее волновое число для возмущений. В токамаке в силу тороидальности в $k_\parallel$ появляется сателитная добавка $\pm 1/qR$ [1)], которая и будет вносить основной вклад в $\mathrm{Re}\,\hat{\eta}$, если $qR < v_e/\omega$. Нас интересуют колебания, имеющие вид сильно вытянутых вдоль магнитного поля возмущений. В таких колебаниях можно пренебречь продольным смещением ионов.

Интегрированием (3) по $v_\parallel$ можно получить уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z\,\nabla\phi]\nabla n = \frac{c}{4\pi e}(\mathbf{b}\nabla)\Delta_\perp\psi. \tag{7}$$

Здесь мы заменили $nv_{\parallel e}$ на $-j/e$, где продольная компонента плотности тока, равна согласно (1)

$$j = \frac{c}{4\pi}\Delta_\perp\psi. \tag{8}$$

Для ионов достаточно рассмотреть плоскопараллельные течения в потенциальном электрическом поле $E = -\nabla\phi$. Эксперимент показывает, что мелкомасштабные флуктуации плотности плазмы в токамаках практически изотропны, поэтому приближенно можно считать, что колебания ионов происходят на однородном фоне $n_0 = \mathrm{const}$. Но в этом случае следующая из кинетического уравнения для ионов связь между флуктуациями плотности $\widetilde{n}$ и ϕ хорошо известна:

$$\widetilde{n} = -\frac{e}{T_i} n_0 \left\{1 - \exp(\rho_i^2\,\Delta_\perp) I_0(-\rho_i^2\Delta_\perp)\right\}\phi, \tag{9}$$

где T_i — температура ионов, $\rho_i^2 = T_i/M\omega_{Bi}^2$, $\omega_{Bi} = \dfrac{eB_0}{Mc}$, M – масса иона. I_0 – функция Бесселя от мнимого аргумента. Подставляя $n = n_0 + n$ в (7) получим:

$$Mn\left\{\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z\,\nabla\phi]\nabla\Gamma\right\} = \frac{\mathbf{B}\nabla}{4\pi}\Delta_\perp\psi, \tag{10}$$

1) Амплитуда которой в ϵ ($\epsilon = r/R$) раз меньше основной гармоники.

где

$$\Gamma = -\rho_i^{-2}\{1-\exp(\rho_i^2\Delta_\perp)I_0(-\rho_i^2\Delta_\perp)\}\frac{c\phi}{B_0}. \tag{11}$$

Уравнения (4), (7) и (10) составляют основную систему уравнений динамики плазмы в сильном магнитном поле. Для температуры T_e, в зависимости от желаемой точности описания, можно либо положить приближенно $\mathbf{b}\nabla T_e = 0$, либо воспользоваться кинетическим уравнением (3).

Чтобы выяснить, что происходит с магнитными поверхностями удобным оказывается рассмотрение еще одного уравнения для поверхности Φ, которая переносится вместе с плазмой:

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{c}{B_0}[\mathbf{e}_z\nabla\phi]\nabla\Phi = 0. \tag{12}$$

Если выбрать в начальный момент $\bar{\mathbf{B}}\nabla\Phi = 0$, то в идеальном случае, $\hat{\eta} = 0$, силовые линии будут лежать на этой поверхности и в дальнейшем. Другими словами при $\hat{\eta} = 0$ уравнение (12) совместно с (4) приводит к условию $\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\nabla)\Phi = 0$. В случае же $\hat{\eta} \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\nabla)\Phi = \frac{c^2}{4\pi}[\nabla(\hat{\eta}\Delta_\perp\psi)\nabla\Phi]_z \tag{13}$$

для любой поверхности, удовлетворяющей уравнению (12). Теперь, силовые линии лежавшие при $t = 0$ на поверхности Φ= const, начинают со временем „протыкать" ее, что и приводит к переносу частиц и тепла поперек плазменного шнура.

Обратимся к уравнению непрерывности (7). Нетрудно убедиться, что при $\hat{\eta} = 0$ оно сохраняет число частиц внутри поверхности Φ= const, т.е. перенос отсутствует. Точно также можно показать, что в силу $B\nabla T_e = 0$ отсутствует и поток тепла. Таким образом, конвективный перенос тепла и частиц в рассматриваемых колебаниях может происходить только за счет конечной проводимости.

Используя уравнение (12) можно получить выражение для потока частиц и тепла. Однако и без вычислений видно, что естественным масштабом для коэффициентов температуропроводности [7] и диффузии служит величина коэффициента „магнитной" диффузии $c^2\hat{\eta}/4\pi$, характеризующим скорость просачивания силовых линий через плазму согласно уравнению (13):

$$D \sim \chi_e \sim \frac{c^2\hat{\eta}}{4\pi}\epsilon \approx \frac{c^2}{\omega_{Pe}^2}\frac{\upsilon_e}{qR}\epsilon, \tag{14}$$

ϵ – появилось здесь за счет баллонного эффекта, отмеченного ранее.

Именно такой масштаб имеют эти величины в токамаках при омическом нагреве и небольших давлениях плазмы, когда нет оснований ожидать очень высокого уровня колебаний.

Литература

1. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* ЖЭТФ, 1973, 65, 575.
2. *Кадомцев Б.Б.* Физика плазмы, 1975, 1, 710.
3. *Днестровский Ю.Н., Лысенко С.Е., Смит Р.* Физика плазмы, 1977, 3, 18.
4. *White R.B., Monticello D.A., Rosenbluth M.N., Straus H.R., Kadomtsev B.B.* In: 5-th Intern. Conf. on Plasma Phys. Coutr. Nucl. Fus. Res. (Tokyo, 1974), Vienna IAEA, 1975, v. 1, p. 495.

5. *Rosenbluth M.N., Monticello D.A., Straus H.R., White R.B.* Phys. Fluids, 1976, **19**, 1987.

6. *Wadell B.V., Rosenbluth M.N., Monticello D.A., White R.B.* Nucl. Fusion, 1976, **16**, 528.

7. *Параил В.В., Погуце О.П.* Письма в ЖЭТФ, 1980, **32**, 480.

8. *Шафранов В.Д.* Вопросы теории плазмы, М.: Атомиздат, 1973, т.3.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
2 февраля 1984 г.