Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 8, стр. 424 – 428 20 апреля 1973 г.

ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ НУЛЕВОЙ МАССЫ

А. Ф. Андреев

Показано, что при гравитационном взаимодействии частиц нулевой массы в течение столкновения энергия-импульс системы изменяются, но возвращаются к первоначальному значению в результате всего столкновения. Отмечается принципиальная возможность существования макроскопических тел, движущихся со скоростью света и в целом обладающих нулевой массой покоя.

Рассмотрим в рамках классической теории вопрос о гравитационном поле, которое создают безмассовые частицы, и о гравитационном взаимодействии таких частиц между собой и с частицами конечной массы.

Несмотря на то, что гравитационное взаимодействие элементарных частиц (нейтрино и фотона) ничтожно мало, рассматриваемый вопрос имеет принципиальный интерес особенно в связи с теми своеобразными особенностями, которыми, как будет видно ниже, обладает это взаимодействие. Кроме того, ниже будет показана принципиальная возможность того, что в природе могут существовать макроскопические объекты, состоящие из частиц конечной массы, но в целом ведущие себя как тела нулевой массы, движущиеся всегда со скоростью света. Для таких тел гравитационное взаимодействие было бы основным.

1. Пусть прямая $x = y = 0$, $z = t$ представляет собой траекторию безмассовой частицы с 4-импульсом $p^i = (\epsilon, \mathbf{p})$, причем $p_i p^i = 0$. Тензор энергии-импульса при этом равен $T_{ik} = (p_i p_k/\epsilon)\delta(t-z)\delta(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ – двумерный радиус-вектор. Необходимо решить линеаризованные уравнения Эйнштейна (см. [1] §105)

$$\Box\psi_{ik} = \frac{16\pi\kappa}{\epsilon} p_i p_k \delta(t-z)\delta(r), \qquad (1)$$

где κ – ньютоновская постоянная тяготения, $\psi_i^k = h_i^k - (1/2)\delta_i^k h_\ell^\ell$, h_{ik} – малые поправки к метрическому тензору. Решение должно удовлетворять следующему важному условию. Именно, оно должно быть инвариантно относительно тех преобразований Лоренца, которые оставляют инвариантным импульс частицы $p^i = (\epsilon, 0, 0, \epsilon)$. В противном случае по существу нарушалась бы релятивистская инвариантность, поскольку в классике частица должна рассматриваться как точечная и ее единственной характеристикой является 4-импульс, а существовали бы преобразования Лоренца не меняющие импульс, но меняющие создаваемое частицей поле. Группа симметрии изотропного вектора – это группа $E(2)$ движений (трансляций и поворотов) плоскости (см. [2]). Ее проще всего представить в координатах ζ, η, u, v, связанных с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \eta u, \quad y = \eta v, \quad \eta = t - z, \quad \xi \equiv t + z = \zeta + \eta(u^2 + v^2). \qquad (2)$$

Преобразования группы $E(2)$ – это те преобразования Лоренца, которые сводятся к трансляциям и поворотам в плоскости (uv) при постоянных ζ, η. Из (2) видно, что такие преобразования не меняют векторов с $t - z = \eta = 0$, т. е. не меняют импульс p^i. Из однородности пространства – времени следует, что решение может зависеть лишь от η и r, но при $\eta \neq 0$ зависимость от r исключается требованием $E(2)$ – симметрии. Так как решение, зависящее лишь от η, описывает свободную гравитационную волну, не имеющую отношения к частице, мы должны считать, что величины ψ_{ik} отличны от нуля лишь при $\eta = 0$. Соответствующее решение уравнений (1) имеет вид[1)]

$$\psi_{ik} = h_{ik} = \frac{8\kappa}{\epsilon} p_i p_k \delta(\eta) \ln\frac{r}{r_0}, \qquad (3)$$

[1)] Толман, Эренфест и Подольский [3] (см. также [4]) рассматривали задачу о гравитационном поле пакета электромагнитных волн, эквивалентную задаче о точечной безмассовой частице. Они, однако, использовали решение в виде запаздывающих потенциалов, которое неудовлетворительно ввиду отсутствия $E(2)$-инвариантности.

где r_0 – произвольная постоянная. Поле отлично от нуля лишь в плоскости, проходящей через частицу перпендикулярно направлению ее движения. Формулу (3) для произвольной прямолинейной траектории можно записать в следующем релятивистски инвариантном виде

$$h_{ik}(x^{\ell}) = 4\kappa p_i p_k \delta(p_{\ell}x^{\ell} - p_{\ell}x_0^{\ell}) \ln \frac{(x^m - x_0^m)(x_{0m} - x_m)}{r_0^2}, \tag{4}$$

где введены величины x_0^i, представляющие собой какую-либо 4-точку на траектории. Они определены с точностью до преобразования $x_0^i \to x_0^i + \alpha p^i$, где α – произвольная постоянная. Решение (4) ввиду $p_i p^i = 0$ инвариантно относительно этого преобразования. Конкретное значение постоянной r_0 не сказывается на физических следствиях. Действительно, если ввести переменную $\xi' = \xi + 8\kappa\epsilon\theta(\eta)\ln(r/r_0)$, где $\theta(\eta) = 0$ при $\eta < 0$ и $\theta(\eta) = 1$ при $\eta > 0$, то интервал, соответствующий метрике (3), имеет вид

$$ds^2 = d\eta d\xi' - (8\kappa\epsilon/r)\theta(\eta)\, d\eta dr - dr^2 - r^2 d\phi^2,$$

т. е. вообще не зависит от r_0. Здесь $\phi = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$.

Рассмотрим как меняется импульс пробной частицы при прохождении плоскости $\eta = 0$ из области $\eta < 0$ в область $\eta > 0$. Из уравнения Гамильтона – Якоби для действия S пробной частицы с массой m (в частности, возможно $m = 0$)

$$\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial S}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + m^2 = 8\kappa\epsilon\delta(\eta)\ln\frac{r}{r_0}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2$$

видно, что производные от S по ξ и ϕ не меняются, т. е. не меняется разность $\omega - k_z$ и величина k_ϕ, где ω – энергия, $\mathbf{k}$ – импульс. Действие S претерпевает скачок в плоскости $\eta = 0$, равный $\Delta S = - 4\kappa\epsilon(\omega - k_z)\ln(r/r_0)$. Дифференцируя последнюю формулу по r, найдем приращение r – компоненты импульса

$$\Delta k_r = -(4\kappa\epsilon/r)(\omega - k_z). \tag{5}$$

Изменение величины $\omega + k_z$ определяется из условия $k_i k^i = m^2$.

Процесс столкновения двух безмассовых частиц в системе центра инерции, в которой частицы имеют одинаковую энергию ϵ и двигаются навстречу друг другу с некоторым прицельным расстоянием r, выглядит следующим образом. Частицы двигаются как свободные до тех пор, пока не окажутся в одной плоскости, перпендикулярной направлению движения. В этот момент они скачком изменяют свои импульсы, после чего снова двигаются свободно. Из формулы (5) находим (в данном случае $\omega = \epsilon$, $k_z = -\epsilon$) угол рассеяния $\chi = -\Delta k_r/\epsilon = 8\kappa\epsilon/r$ и дифференциальное сечение $d\sigma = 2\pi r dr = 2\pi(8\kappa\epsilon)^2 d\chi/\chi^3$. Его зависимость от угла такая же, как для обычных частиц, взаимодействующих по закону Ньютона.

Своеобразно выглядит процесс столкновения безмассовой частицы с покоящейся частицей конечной массы. Первая из них двигается известным образом в ньютоновском поле массивной частицы, непрерывно меняя свой импульс. Массивная же частица приобретает импульс $k = 4\kappa\epsilon m/r$ (ϵ – энергия безмассовой частицы, m – масса покоя массивной, r – прицельное расстояние) скачком в момент пересечения поля безмассовой частицы, после чего двигается свободно. Этот импульс в точности совпадает с изменением импульса безмассовой частицы, возникающим за весь период столкновения. Последнее равно $\epsilon\Delta\phi$, где $\Delta\phi$ – известное (см. [1] § 98) значение угла отклонения фотона в гравитационном поле покоящегося тела. Поскольку в линейном по полю приближении мы должны считать, что энергия и импульс системы равны сумме энергий и импульсов частиц, в данном случае мы сталкиваемся с несохранением энергии-импульса в течение столкновения. То же самое имеет место при столкновении безмассовых частиц между собой в системе отсчета, отличной от системы центра инерции, когда частицы меняют импульсы в разные моменты времени. Существенно, однако, что в результате всего столкновения энергия и импульс системы не меняются.

2. Гравитационное поле в области позади от тела нулевой массы равно нулю лишь в линейном приближении. Вычислим это поле на основе точных нелинейных уравнений Эйнштейна. Наиболее общая метрика, инвариантная относительно группы $E(2)$, может быть записана в виде

$$ds^2 = A(\eta,\ \zeta)\, d\eta\, d\zeta - B(\eta,\ \zeta)(du^2 + dv^2) \qquad (6)$$

Гелилеевой метрике в координатах (2) соответствует $A = 1$, $B = \eta^2$. Подставляя (6) в уравнения поля в пустоте, найдем $B = (2/A)^2 = \alpha\eta + \beta\zeta + \gamma$, где α, β, γ – произвольные постоянные. После преобразования $\alpha\eta + \beta\zeta + \gamma \to \eta$ окончательно получаем

$$ds^2 = d\zeta d\eta + (\eta_0/\eta)\, d\zeta^2 - \eta^2(du^2 + dv^2), \qquad (7)$$

где $\eta_0 > 0$ – постоянная. Метрика (7) приводится к казнеровской с индексами $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ (см. [1] § 103), равными $(-1/3,\ 2/3,\ 2/3)$ и имеет физическую особенность при $\eta = 0$. При $\eta \to \infty$ метрика стремится к галилеевой, поэтому координата η возрастает при удалении от тела. Границам светового конуса для движений с $du = dv = 0$, т. е., в частности, для движений вдоль прямой, по которой двигается тело, соответствуют, как видно из (7), равенства $d\zeta = 0$ и $d\eta = -(\eta_0/\eta)\, d\zeta$. Отсюда ясно, что при конечных η внутри конуса будущего имеются направления, соответствующие уменьшению η. Таким образом, пробные частицы конечной массы, находящиеся на конечном расстоянии от тела, могут догонять его, несмотря на то, что тело двигается относительно удаленного наблюдателя со скоростью света. Тем более, они могут покоиться относительно него. Отсюда следует, что тело нулевой массы может состоять из частиц конечной массы.

Выражаю благодарность И.М.Лифшицу, Е.М.Лифшицу, Л.П.Питаевскому и И.М.Халатникову за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1973 г.

Литература

[1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., изд. Наука, 1967.

[2] И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958, стр. 336

[3] R.V.Tolman, P. Ehrenfest, B.Podolsky. Phys. Rev., 37, 602, 1931.

[4] R.C.Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934, §114.