*Письма в ЖЭТФ, том 10, стр. 49 – 53* *5 июля 1969г.*

20, 26

# МАГНИТНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ УРОВНИ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

*М.Я.Азбель, А.Я.Бланк*

Недавно Пинкус указал на принципиальную возможность существования в сверхпроводнике одночастичных связанных состояний, обусловленных проникновением магнитного поля [1]. Физическая причина появления дискретных уровней состоит в квантовании финитного движения квазичастиц в потенциальной яме, создаваемой магнитным полем вблизи поверхности металла. В настоящем сообщении мы получим спектр одночастичных возбуждений в сверхпроводнике в квазиклассическом приближении и дадим простую физическую интерпретацию квантовых состояний.

Будем исходить из уравнений Горькова для волновых функций квазичастиц [2]. Сверхпроводник занимает полупространство $x > 0$. Векторный потенциал $A = (0, -\int_x^\infty H(x')\,dx', 0)$. На границе сверхпроводника предположим условия зеркального отражения, которые в квазиклассическом приближении имеют вид

$$g|_{x=0} = f^+|_{x=0} = 0. \qquad (1)$$

(Заметим, что форма записи граничных условий в отсутствие диффузного рассеяния несущественна для определения спектра). Почти зеркальное отражение обусловлено малыми углами $\phi$ столкновений интересующих нас почти скользящих электронов с поверхностью $\phi \leqslant \phi_0 = (\delta/r)^{1/2} \ll 1$ ($r$ – циклотронный радиус, $\delta$ – глубина проникновения магнитного поля). Поскольку число таких электронов мало ($\sim\phi_0$), энергетическая щель $\Delta$ определяется, по-прежнему, самосогласованными взаимодействиями в объеме металла. В линейном по $H$ приближении щель постоянна.

Волновые функции будем искать в виде:

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \exp(i P_y y + i p_z z) \exp(i S(x)), \qquad (2)$$

где в квазиклассике $S(x)$ – быстро меняющаяся функция координаты. Условие квазиклассичности в типичном случае имеет вид $H \gg (a/\delta\kappa) H_c$, где $a$ порядка межатомного расстояния, $H_c$—критическое магнитное поле, $\kappa$ – параметр Гинзбурга – Ландау. Обобщенный импульс системы $p = \partial S/\partial x$ в основном приближении по квазиклассическим параметрам имеет вид

$$p_\pm^2/2m = \mu - \epsilon_\perp \pm [(\epsilon + \frac{e}{mc} A_y P_y)^2 - \Delta^2]^{1/2}, \qquad (3)$$

где $\epsilon_\perp = (p_z^2 + P_y^2)/2m$, остальные обозначения см. в [2]. График функций $p_\pm(x)$ при наиболее интересных значениях параметров показан на рис. 1 (рассмотрены только $\mu - \epsilon_\perp = a > 0$ поскольку $p_-^2(a) = -p_+^2(a)$.

Существенно, что, как видно из формулы (3), скорость $v_{\pm} = \partial\epsilon/\partial p_{+}$ обращается в нуль в точке "окончания" вещественных ветвей (т.е. на границе классически доступной области). Зависимости $p_{\pm}(x)$ соответствует классическая траектория $v_{\pm}(x) = \dot{x}_{\pm}(x)$, показанная на том же рисунке. Очевидно, дискретные квантовые уровни соответствуют периодическим траекториям вблизи поверхности металла (см. рис. 1).

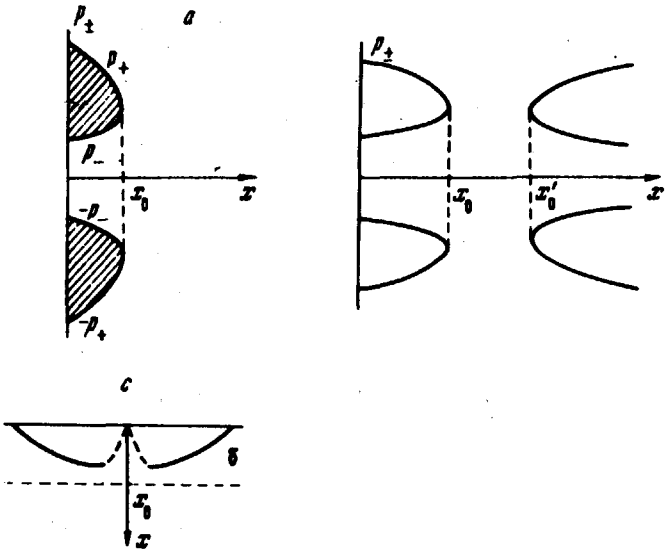


Рис. 1. Фазовые траектории возбуждений

$a > [(-\frac{e}{mc} AP_y)^2 - \Delta^2]^{1/2}$: $a$ – $P_y < 0$, $в$ – $P_y > 0$,
$c$ – траектория в реальном пространстве

Оставляя детальный анализ возможных ситуаций для более подробной публикации, мы ограничимся здесь характерным случаем, соответствующим рис. 1. В этом случае единственная точка поворота $x_0$ общая для электрона и "дырки" (электроном и дыркой мы условно называем ветви, различаемые индексами "+" и "–"), является точкой отражения для частиц. Электрон, идущий от поверхности, приходит в точку $x_0$ с импульсом $p_{+}$, отражается в ней и переходит в "дырку" с импульсом $p_{-}$ (уйти с другим импульсом ему "запрещает" наличие скачка импульса между парами ветвей при $x = x_0$). Соответственно "дырка" $(-p_{-})$, пришедшая в точку $x_0$, переходит при отражении в электрон с импульсом $(-p_{+})$.

Докажем этот результат. Как обычно в области $x < x_0$ волновую функцию представим в виде суммы осциллирующих, а при $x > x_0$ зату-

хающих экспонент. Амплитуды B при $x > x_0$ связаны с амплитудами A при $x < x_0$ матрицей перехода, которая может быть представлена в виде

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^* \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где элементы двухрядной матрицы $b$ порядка единицы. Тот факт, что амплитуды $A$ и $B$, соответствующие различным парам ветвей, не перепутываются между собой, есть следствие существования скачка импульса в точке $x_0$. Формально это может быть показано сведением системы уравнений Горькова вблизи точки поворота к уравнению с линейными коэффициентами и последующим интегрированием его методом Лапласа (см. например, [3]), что одновременно позволяет найти элементы матрицы $\hat{\beta}$. Этот метод позволяет также найти точное решение для возбуждений, движущихся у самой поверхности в практически однородном поле. Комплексная сопряженность двухрядных матриц $\hat{b}$ может быть легко установлена из соображений симметрии.

Из условия равенства нулю амплитуд соответствующих решениям, нарастающим вглубь металла, используя граничные условия (1), получим с точностью до фазы $\gamma$ условие квазиклассического квантования одночастичных возбуждений в сверхпроводнике

$$S = \int_0^{x_0} (p_+ - p_-)\,dx = (n + \gamma)\,\pi. \qquad (5)$$

Пусть для определенности поле затухает вглубь металла экспоненциально $H = H_0\, e^{-x/\delta}$. Тогда площадь $S$, заштрихованная на рис. 1,а, может быть выражена через эллиптические интегралы. Не делая здесь конкретных расчетов, приведем в качестве примера один частный случай формулы (5), который может быть использован для оценок. При

$$(\mu - \epsilon_\perp)/\Delta \gg [\,(\epsilon - \Delta + \Omega\delta|P_y|)/\Delta]^{1/2}$$

$$\epsilon = \Delta - \Omega\delta|P_y| + \Omega|P_y|\,[\,\frac{3}{4}(n+\gamma)\,\pi\hbar\,]^{2/3}\,(\frac{\mu - \epsilon_\perp}{m\Omega\Delta|P_y|})^{1/3}, \qquad (6)$$

где $\Omega = eH_0/mc$.

При разумных значениях параметров на глубине $\delta$ может поместиться несколько уровней, которые при дальнейшем изменении $P_y$ сменяются непрерывным спектром. Эти уровни схематически изображены на рис. 2.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и во всех остальных случаях. Результат его, однако, ясен уже из рис. 1. Во всех случаях квантование соответствует классическому периодическому движению, причем расстояние между уровнями $\Delta\epsilon$ определяется его периодом $T$: $\Delta\epsilon = \hbar/T$. Например, ясно, что в случае рис. 1,б уровни расщепляются в полосу, ширина которой определяется вероятностью туннелирования квазичастиц из одной области классически разрешенного движения в другую и экспоненциально убывает по мере удаления этих областей

друг от друга. Из формулы (3) следует также, что уже слабое магнитное поле уменьшает энергетическую щель в спектре квазичастиц вблизи поверхности и, более того, может обратить ее в нуль. В самом деле, при $H = 0$ спектр становится непрерывным и допустимы любые энергии, совместимые с классическим движением. Из (3) видно, что при $H = 0$ это приводит к $|\epsilon| > \Delta$, тогда как при $H \neq 0$, $|P_y| = \Delta/\Omega\delta$ допустимо даже $\epsilon = 0$. Поскольку $P_y \lesssim P_o$, для исчезновения щели необходимо $\Omega\delta p_o \gtrsim \Delta$. Для типичных металлов сдвиг порядка $\Delta$ имеет место в полях $H \gtrsim 10$ э. Разумеется, соответствующее поле должно быть меньше

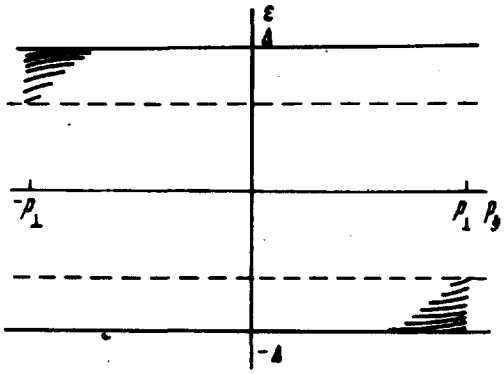


Рис. 2. Спектр возбуждений вблизи поверхности

критического. В лондоновском случае соответствующее поле оказывается порядка, а в пиппардовском может быть значительно меньше термодинамического критического поля. Следует иметь в виду, однако, что число состояний таких квазичастиц мало и стремится к нулю при $H \to 0$.

В заключение рассмотрим нормальные возбуждени, у которых $\epsilon \gg \Delta$. Траектория является периодической при $P_y < 0$, $|P_y| > p_\perp$. В обратном случае электрон покидает скин-слой. Период движения и соответственно, расстояние между уровнями энергии нормального электрона в первом случае определяются формулой

$$T = \frac{m\delta}{(P_y^2 - p_\perp^2)^{1/2}} \left(\pi + 2 \arcsin \frac{p_\perp^2 - P_y^2 + |P_y|\, m\Omega\delta}{m\Omega\delta p_\perp}\right). \qquad (7)$$

Мы пользуемся случаем поблагодарить Л.П. Горькова, Ю.Н. Овчинникова и Г.М. Элиашберга за полезное обсуждение работы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д. Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 мая 1969 г.

## Литература

[1] *P.A. Pincus. Phys. Rev.*, 158, *346, 1967; J.F. Koch, P.A. Pincus. Phys. Rev. Lett.*, 19, *1044, 1967; J.F. Koch, C.C. Kuo. Phys. Rev.*, 164, *618, 1967.*

[2] А. А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.
[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.