Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 9, стр. 534 – 538 5 мая 1973 г.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В РАСТВОРАХ ДВУХ СВЕРХТЕКУЧИХ ЖИДКОСТЕЙ

И.М.Халатников

Уравнения гидродинамики растворов двух сверхтекучих жидкостей были выведены в работе [1]. Там же было указано, что в таких растворах должны распространяться незатухающие звуковые колебания трех типов. В настоящее время можно считать доказанным, что в жидком He^3 при температуре порядка нескольких милликельвин происходит фазовый переход в сверхтекучее состояние [2]. Можно не сомневаться, что аналогичный переход будет происходить в растворах He^3 в He^4. При достаточно низких температурах должно начаться куперовское спаривание атомов He^3 и переход их в сверхтекучее состояние. В связи с этим мы хотели бы вернуться к вопросу о гидродинамических свойствах смеси двух сверхтекучих жидкостей, и в частности, исследовать распространение звука в таких смесях.

Запишем уравнения гидродинамики смеси двух сверхтекучих жидкостей [1]. Система уравнений включает: а) уравнения непрерывности (ρ – плотность, c – концентрация)

$$\dot{\rho}_1 + \operatorname{div}(\rho_{s1}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{n1}\mathbf{v}_n) = 0; \quad \dot{\rho}_2 + \operatorname{div}(\rho_{s2}\mathbf{v}_{s2} + \rho_{n2}\mathbf{v}_n) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_1 = \rho c = \rho_{s1} + \rho_{n1}, \quad \rho_2 = \rho(1-c) = \rho_{s2} + \rho_{n2}$$

($\mathbf{v}_{s1}$ и $\mathbf{v}_{s2}$ – скорости сверхтекучего движения соответственно 1 и 2 компонент, $\mathbf{v}_n$ – скорость нормального движения[1]); б) уравнение непрерывности для энтропии

$$\dot{S} + \operatorname{div} S\mathbf{v}_n = 0; \qquad (2)$$

в) уравнения сверхтекучих движений

$$\dot{\mathbf{v}}_{s1} + \nabla\left(\mu_1 - \frac{\mathbf{v}_n^2}{2} + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_{s1}\right) = 0,$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{s2} + \nabla\left(\mu_2 - \frac{\mathbf{v}_n^2}{2} + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_{s2}\right) = 0, \qquad (3)$$

где μ_1 и μ_2 – химические потенциалы, определяемые тождеством для энергии ϵ

$$d\epsilon = TdS + \mu_1 d\rho_1 + \mu_2 d\rho_2 + \rho_{s1}(\mathbf{v}_{s1} - \mathbf{v}_n)\, d(\mathbf{v}_{s1} - \mathbf{v}_n) +$$

$$+ \rho_{s2}(\mathbf{v}_{s2} - \mathbf{v}_n)\, d(\mathbf{v}_{s2} - \mathbf{v}_n); \qquad (4)$$

г) уравнение сохранения полного импульса

$$\mathbf{j} = \rho_{s1}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{s2}\mathbf{v}_{s2} + \rho_n\mathbf{v}_n \qquad \dot{j}_i + \partial\Pi_{ik}/\partial x_k = 0, \qquad (5)$$

где тензор потока импульса равен ($\rho_n = \rho_{n1} + \rho_{n2}$)

$$\Pi_{ik} = \rho_{s1}v_{s1i}v_{s1k} + \rho_{s2}v_{s2i}v_{s2k} + \rho_n v_{ni}v_{nk} + p\delta_{ik}, \qquad (6)$$

а давление

$$p = -\epsilon + TS + \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2 \qquad (7)$$

---

[1] Нормальная плотность $\rho_{n1} = \rho c - \rho_{s1}$ определяет число нормальных атомов фермиевской компоненты и отличается от нормальной плотности фермиевских возбуждений ρ_{nF} множителем m^*/m, где m^* – эффективная масса. Поэтому нормальная плотность ρ_{n2} включает в себя не только нормальную плотность бозевских возбуждений (фононов) ρ_{nB}, но и часть нормальной плотности фермиевских возбуждений $\rho_{n1}\left(\frac{m^*}{m} - 1\right)$, т.е. $\rho_{n2} = \rho_{nB} + \rho_{n1}\left(\frac{m^*}{m} - 1\right)$.

Удобно ввести вместо μ_1 и μ_2 новые потенциалы $\mu = c\mu_1 + (1-c)\mu_2$ и $\zeta = \mu_1 - \mu_2$. Тогда для давления из (7) имеем тождество ($\sigma = S/\rho$)

$$\frac{1}{\rho}\, dp = \sigma dT + d\mu - \zeta dc\ . \tag{8}$$

Найдем теперь звуковые решения системы уравнений (1), (2), (3), (5). Линеаризовав эти уравнения и исключив из них скорости v_{s1}, v_{s2} и v_n получим три волновых уравнения

$$\begin{gathered}\rho_{s1}(\sigma\Delta T - (1-c)\Delta\zeta) + \rho\ddot{c} - \rho_{n1}\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} = 0,\\ \rho_{s2}(\sigma\,\Delta T + c\,\Delta\zeta) - \rho\ddot{c} - \rho_{n2}\frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} = 0, \qquad \ddot{\rho} - \Delta p = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Ищем такие решения уравнений, в которых все термодинамические величины изменяются по закону $\exp i\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ (плоская бегущая волна). Выбираем в качестве независимых переменных p, T и c. Тогда условие совместности уравнений (9) дает дисперсионное уравнение, определяющее квадрат скорости звука

$$\begin{gathered}u^6 - u^4\left\{\frac{\rho_s}{\rho_n}\bar{\sigma}^2\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial\rho}\left(1 + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right]\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)^2\right)\right\} +\\ + u^2\left\{\left(\frac{\rho_s}{\rho_n}\bar{\sigma}^2\frac{\partial T}{\partial\sigma} + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right]\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)\frac{\partial p}{\partial\rho} + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\sigma^2\frac{\partial T}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial\rho}\,\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)^2\right)\right\} -\\ - \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\,\frac{\partial\zeta}{\partial c}\,\sigma^2\frac{\partial T}{\partial\sigma}\,\frac{\partial p}{\partial\rho} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right] = c\,\frac{\rho_{n1}}{\rho_{s1}} + (1-c)\,\frac{\rho_{n2}}{\rho_{s2}},$$

$$\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} = 1 + \frac{2}{\rho_s}\left(\rho_{s1}(1-c) - \rho_{s2}c\right)\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial\sigma}{\partial c} + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n\rho}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right]\left(\frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial\sigma}{\partial c}\right)^2.$$

При выводе (10 мы пренебрегли членами с производными $(\partial\rho/\partial T)$. Учет этих членов дает пренебрежимо малые поправки к величинам скоростей звука. Полученное уравнение является кубическим относительно квадрата скорости звука u^2. Оно имеет три вещественных корня, соответствующих трем типам незатухающих звуковых волн. Заметим, что в случае, когда одна из компонент смеси не обладает свойством сверхтекучести ($\rho_{s1} = 0$), первое из уравнений (9) теряет волновой характер и устанавливает только связь между колебаниями концентрации c и энтропии σ. В этом случае дисперсионное уравнение становится квадратным и определяет скорости известных первого и второго звуков в растворах He^3 в He^4 [3].

Корни уравнения (10) легко находятся благодаря малости одного из корней по сравнению с двумя другими. Первый корень этого уравнения

$$u_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \tag{11}$$

определяет скорость первого звука, с такой скоростью распространяются волны сжатия (давления). Второй корень

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n}\bar{\sigma}^2\frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_n \rho}\frac{\partial \zeta}{\partial c}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right] \tag{12}$$

определяет скорость "второго" звука. С такой скоростью распространяются колебания температуры и концентрации.

Наконец, третий корень

$$u_3^2 = \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}\sigma^2}{\rho_s \rho \bar{\sigma}^2}\frac{\partial \zeta}{\partial c}\Bigg/\left(1 + \frac{\rho_{s1}\rho_{s2}}{\rho_s \rho \bar{\sigma}^2}\left[\frac{\rho_n}{\rho_s}\right]\frac{\partial \zeta}{\partial c}\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) \tag{13}$$

определяет скорость "третьего" звука[1]. Распространение "третьего" звука является специфическим свойством смеси двух сверхтекучих жидкостей. В точке фазового перехода ($\rho_{s1} = 0$) скорость u_3 обращается в нуль, а скорость второго звука равна

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n}\left(\bar{\sigma}^2\frac{\partial T}{\partial \sigma} + c^2\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) \tag{14}$$

(что совпадает с результатом, полученным в [3] для раствора несверхтекучего He^3 в He^4).

Плотность ρ_{nl} при понижении температуры должна убывать по экспоненциальному закону. Вблизи $T = 0$ скорость третьего звука стремится к значению

$$u_3^2 = c(1-c)\frac{\partial \zeta}{\partial c} . \tag{15}$$

Скорость второго звука u_2 в этом пределе ($\rho_{n1} << \rho_{n2}$) стремится к значению

$$u_2 = u_{10}/\sqrt{3} \tag{16}$$

(u_{10} – скорость первого звука при $T = 0$).

В формулах (11), (12) и (13) мы пренебрегли малыми членами, имеющими относительный порядок $c[(1/\rho)(\partial\rho/\partial c)]^2$, что для слабых растворов всегда справедливо (в вырожденных растворах He^3 в He^4 $c < 0{,}06$).

---

[1] Этот звук не следует путать со звуком также называемым третьим и распространяющимся по пленкам жидкого гелия II.

Со скоростью "третьего" звука распространяются колебания концентрации c. Анализ уравнения (9) показывает, что эти колебания зацеплены с колебаниями плотности ρ и температуры T, что позволяет легко их возбуждать.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 апреля 1973 г.

Литература

[1] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 32, 653, 1957.

[2] T. A. Alvesalo, Yu. D. Anufriev, H. K. Collan, O. V. Lounasmaa, p. Wennerström. Phys. Lett., A43, 175, 1973.

[3] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 29, 265, 1952; И.М.Халатников. ЖЭТФ, 23, 169, 1952.