Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.4, стр.241 - 246 © 1995г. 25 февраля

СПИНОВАЯ (СУПЕР)ЧАСТИЦА С КОММУТИРУЮЩИМ ИНДЕКСНЫМ СПИНОРОМ

В.Г.Зима[1)], *С.А.Федорук*[1)]

Харьковский государственный университет

310 077 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 5 января 1995 г.

Предложено действие для спиновой частицы, конфигурационное пространство которой параметризуется наряду с вектором пространственно-временных координат коммутирующим вейлевским спинором. После квантования модель описывает массивную(безмассовую) частицу с произвольным фиксированным конечным спином(спиральностью). Спинорная координата играет роль индексного спинора. В суперслучае ферми-связи безмассовой и массивной суперчастицы с центральными зарядами легко разделяются по родам ковариантным и неприводимым способами.

Изучение релятивистских квантовых формулировок теории спиновой частицы является важным разделом теории (супер)p-бран. Хорошо известно, что описание спина требует привлечения наряду с пространственно-временными координатами дополнительных "спиновых" переменных, которые могут быть как грассмановыми [1-5] так и c-числовыми [6-14]. Известные формулировки спиновой частицы с c-числовыми спиновыми переменными обладают определенными недостатками, что оправдывает поиск новых подходов.

В настоящей работе предложена модель спиновой частицы с c-числовым вейлевским спинором, которая единым образом описывает массивный и безмассовый случаи. В системе покоя конфигурационное пространство модели – групповое многообразие квантовомеханической группы вращений $SU(2)$ (для безмассовой частицы – $E(2)$). Пространственно-временные координаты модели в естественной калибровке являются координатами типа Ньютона–Вигнера, не обнаруживая классического Zitterbewegung'а. В массивном случае – связи второго рода, в безмассовом – смесь связей первого и второго родов. Модель легко суперсимметризуется и снимает проблему ковариантного разделения связей по родам в безмассовом случае. В суперсимметричной теории бозевские спиноры модели определяют клиффордов вакуум неприводимых представлений. Результат квантования выражается через (анти)голоморфные функции, соответствующие конечному спину, вследствие чего выполняется условие микропричинности.

Модель существенно отлична от известных формулировок, с использованием коммутирующих спиноров [6–10], в которых конфигурационное пространство спина ограничивается до необходимого безотносительно к выбору системы покоя, которые поэтому можно рассматривать как однотипные обобщения работы [6]. Конфигурационное пространство спина в работах [8] – пространство топа, что требует варьирования процедуры квантования (допущение двухзначных представлений) для получения полуцелых спинов. Это характерно также для подхода [7], использующего векторные гармоники. Во всех этих формулировках описания случаев $m = 0$ и $m \neq 0$ существенно различны. "Классический спин" в [9,10] фактически отожествляется с квантовым, что из-за наличия в

[1)] V.G.Zima, S.O.Fedoruk

операторе спина произведений некоммутирующих переменных подразумевает выбор определенного упорядочения, не обоснованный физически. Строгая фиксация спина на классическом уровне ограничивает рассмотрение эффективным действием квантовой теории.

Последовательное описание безмассовой частицы со спином с использованием коммутирующих спиноров проводилось ранее в рамках почти идентичных твисторного [11,12] и гармонического [13,14] подходов. Рассматриваемая модель для $m = 0$ воспроизводит твисторную формулировку [12] с некоторым допустимым закреплением калибровки.

Запишем лагранжиан спиновой частицы в виде

$$L = p\dot{\omega} - \frac{e}{2}(p^2 + m^2) - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j), \tag{1}$$

где $\omega_\mu \equiv \dot{\omega}_\mu d\tau \equiv dx_\mu - id\zeta\sigma_\mu\bar{\zeta} + i\zeta\sigma_\mu d\bar{\zeta}$, τ – параметр эволюции, e и λ – множители Лагранжа, m – масса, $j \neq 0$ – безразмерная константа ($\hbar = c = 1$), x и p – 4-векторы координаты и энергии-импульса, $\hat{p} \equiv p^\mu\sigma_\mu$, ζ – коммутирующий вейлевский спинор, описывающий спиновую степень свободы. В формализме 2-го порядка физически-эквивалентный лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2e}(\dot{\omega}^2 - e^2m^2) + g(\zeta\hat{\dot{\omega}}\bar{\zeta} - ej), \tag{2}$$

где $eg = \lambda$.

В системе покоя действие (1) становится действием механической системы, конфигурационное пространство которой является групповым многообразием $SU(2)$ – квантово-механической группы вращений : кинетический член возникает вследствие использования формы ω, а спиновая связь $\zeta\hat{p}\bar{\zeta} = j$ ограничивает конфигурационное пространство групповым многообразием. Это обстоятельство выгодно отличает модель от модели топа. Таким образом, в предложенном действии ярко проявляется известная теорема Бореля–Ботта.

Структура действия определяется спинорным характером спиновых переменных ζ, и потому не удивительный, но очень привлекательный факт состоит в том, что, исключая слагаемое спиновой связи, наше действие совпадает с известным действием КБШ [3,15], если рассматривать спиноры как грассмановы. Осмысленность результата “бозонизации” грассмановых векторных спиновых переменных для определенной спиновой частицы отмечалась, например, в [8].

Спиновая связь, заложенная в действие, индуцирует стандартную спиновую связь, определяющую после квантования спин частицы, так что константа j – “классический спин”, перенормируемый при квантовании константой упорядочения. Действительно, классический вектор Паули–Любаньского $w = (\zeta\hat{p}\bar{\zeta})p - p^2(\zeta\sigma\bar{\zeta})$, легко получаемый нетеровской процедурой, на поверхности связей имеет квадрат $w^2 = m^2j^2$ и, в случае безмассовой частицы, пропорционален импульсу $w = jp$. Значение $j = 0$ исключается как делающее спиновую динамику тривиальной.

В калибровке собственного времени $xp + \tau m = 0$ уравнения движения для пространственных координат принимают вид $m\dot{x} = p$, $p = \text{const}$, так что координаты в действии (1) являются координатами типа Ньютона–Вигнера (для них нет Zitterbewegung’а), что является определенным достоинством модели.

Система связей, соответствующих действию (1), эквивалентна системе

$$p^2 + m^2 \approx 0\,, \tag{3}$$

$$S - j \equiv \frac{i}{2}(\zeta p_\zeta - \bar{p}_\zeta \bar{\zeta}) - j \approx 0\,, \tag{4}$$

$$d_\zeta \equiv ip_\zeta - \hat{p}\bar{\zeta} \approx 0, \quad \bar{d}_\zeta \equiv i\bar{p}_\zeta + \zeta\hat{p} \approx 0. \tag{5}$$

Ненулевые скобки Пуассона (СП) этих связей имеют вид

$$\{S, d_\zeta\} = \frac{i}{2}d_\zeta, \quad \{S, \bar{d}_\zeta\} = -\frac{i}{2}\bar{d}_\zeta, \quad \{d_\zeta, \bar{d}_\zeta\} = -2i\hat{p}.$$

Таким образом, массовая (3) и спиновая (4) связи – 1-го рода, а спинорные (5), в случае массивной частицы, – 2-го. В безмассовом случае, когда матрица $\hat{p}$ сингулярна, спинорные связи – смесь связей 1-го и 2-го родов. Отметим, что после перехода к грассмановым спинорам и градуированным СП алгебра спинорных связей совпадает с алгеброй ферми-связей суперчастицы КБШ. В безмассовом случае ферми-связи суперчастицы образуют бесконечно-приводимую систему, что исключает ковариантное квантование без привлечения вспомогательных переменных. В противоположность этому для спиновой частицы (1) спинорные связи изящно разделяются по родам, если воспользоваться базисом в спинорном пространстве, образованным спинорами ζ и $\hat{p}\bar{\zeta}$. Для проекций на эти спиноры спинорных связей (5) ($\phi \equiv d_\zeta \hat{p}\bar{\zeta}$, $\chi \equiv \zeta d_\zeta$) имеем на поверхности связей (3),(4) алгебру

$$\{\chi, \phi\} \approx 0, \quad \{\bar{\chi}, \phi\} \approx 0, \quad \{\phi, \bar{\phi}\} \approx 0, \quad \{\chi, \bar{\chi}\} \approx -2ij. \tag{6}$$

Таким образом, лоренц-инвариантные проекции ϕ и χ, а также их к. с., – независимые связи 1-го и 2-го родов соответственно.

В безмассовом случае связей 1-го и 2-го родов достаточно для локального исключения всех дополнительных (спиновых) степеней свободы из числа динамических. Когда масса отлична от нуля, все спинорные связи 2-го рода и остается одна динамическая спиновая степень свободы.

Связи 2-го рода рассматриваемой спиновой частицы образуют сопряженные пары коммутирующих связей, что делает естественным выбор в качестве процедуры квантования квантование по Гупте–Блейлеру. Соответственно на волновую функцию налагаем связи 1-го рода и половину коммутирующих связей 2-го рода, так что связи 2-го рода выполняются в среднем. При построении квантовой алгебры фундаментальных спинорных переменных используем координатное представление, реализуя операторы спинорных координат ζ в терминах операторов умножения, а операторы сопряженных импульсов – в терминах операторов дифференцирования $p_\zeta = -i\partial/\partial\zeta$. Выбор конкретного представления для пространственно-временных координат x и импульсов p в рассматриваемых вопросах несуществен.

Волновая функция Ψ – скаляр, зависящий от спинорных координат ζ, $\bar{\zeta}$ и, в случае выбора координатного представления для пространственно-временных переменных, от 4-вектора x. Связи 1-го рода, массовая и спиновая, приводят к уравнениям

$$(p^2 + m^2)\Psi = 0, \tag{7}$$

$$(S - s)\Psi = 0, \tag{8}$$

где s – перенормированный константой упорядочения классический спин j. Константы упорядочения возникают при квантовании в выражениях, содержащих произведения некоммутирующих величин. Требование однозначности волновой функции ограничивает значение s полуцелым: $2s \in Z$.

Сосредоточимся сначала на рассмотрении частицы с ненулевой массой. Подчиняя волновую функцию половине коммутирующих связей 2-го, рода выберем "голоморфный случай"

$$\bar{D}_\zeta \Psi = 0, \tag{9}$$

где D_ζ – квантовые аналоги связей d_ζ. "Антиголоморфный" случай с уравнением $D_\zeta \Psi = 0$ обсудим ниже.

Воспользовавшись выражениями для спиновой части лоренцевых генераторов $M_{\alpha\beta} = \zeta_{(\alpha}\partial/\partial\zeta^{\beta)}$ для вектора Паули–Любанского $W_{\alpha\dot{\alpha}} = p_{\beta\dot{\alpha}} M^{\beta}_{\alpha} - p_{\alpha\dot{\beta}} \bar{M}^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}$ получаем выражение

$$W^{\alpha\dot{\alpha}} = Sp^{\alpha\dot{\alpha}} + \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}(\bar{D}_\zeta \tilde{p})^{\alpha} - \zeta^{\alpha}(\tilde{p}D_\zeta)^{\dot{\alpha}} + 2\zeta^{\alpha}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}p^2, \tag{10}$$

где $\tilde{p} \equiv p^{\mu}\tilde{\sigma}_{\mu}$. Соответственно,

$$W^2 = -p^2 S(S+1) - p^2(\zeta D_\zeta + 1)\bar{\zeta}\bar{D}_\zeta - ((\zeta\hat{p}\bar{\zeta})(D_\zeta \hat{p}\bar{D}_\zeta) =$$

$$= p^2 S(1-S) - p^2(\bar{\zeta}\bar{D}_\zeta + 1)\zeta D_\zeta - ((\zeta\hat{p}\bar{\zeta})\bar{D}_\zeta \tilde{p} D_\zeta, \tag{11}$$

где последнее выражение удобно при рассмотрении антиголоморфного случая. С учетом (7)-(9) $W^2 = m^2 s(s+1)$. Когда полуцелое $s \geq 0$, это спин для $m^2 > 0$.

Для поля

$$\Phi_+ = \exp(+\zeta\hat{p}\bar{\zeta})\Psi \tag{12}$$

условие (9) переходит в условие голоморфности $\partial\Phi_+/\partial\bar{\zeta} = 0$, а спиновая связь (8) – в условие однородности $(\zeta\partial/\partial\zeta - 2s)\Phi_+ = 0$. Поэтому $s \geq 0$ и Φ_+ – однородный полином по ζ степени $2s$. Коэффициенты разложения Φ_+ по степеням ζ-компоненты симметричного непунктирного спинора ранга $2s$ – обычное $(2J+1)$-компонентное поле, удовлетворяющее уравнению Клейна–Гордона. Таким образом, в массивном случае ζ играет роль индексного спинора. Для таких полей выполняется принцип микропричинности.

В "антиголоморфном" случае рассмотрение проводится аналогично. Однако теперь $W^2 = -m^2 s(1-s)$. Антиголоморфное поле $\Phi_- = \exp(-\zeta\hat{p}\bar{\zeta})\Psi$ однородно по $\bar{\zeta}$ степени $-2s$ и всюду определено, когда $s \leq 0$. Соответствующее ему обычное поле – симметричный пунктирный спинор ранга $2|s|$ – имеет спин $J = |s|$. Таким образом, выбор голоморфного (9) или антиголоморфного условия на волновую функцию управляется знаком s.

В безмассовом случае волновая функция наряду с массовым и спиновым условиями (7),(8) подчинена спинорным связям 1-го рода

$$\bar{\zeta}\tilde{p}D_\zeta\Psi = 0, \quad \bar{D}_\zeta\tilde{p}\zeta\Psi = 0, \tag{13}$$

для которых массовая связь (7) является условием совместности. Налагаем на Ψ также одну из связей 2-го рода – "голоморфную"

$$(\bar{\zeta}\bar{D}_\zeta - c + s)\Psi = 0. \tag{14}$$

Здесь $(c - s)$ – в общем комплексная константа упорядочения. С учетом массового условия (7) и спинорных связей (13) вектор Паули–Любанского (10) пропорционален импульсу $W = Sp$. Поэтому s – спиральность.

Для поля

$$\tilde{\Phi}_+ = (\zeta\hat{p}\bar{\zeta})^{c-s}\Phi_+ \tag{15}$$

условия (14) и второе (13) переходят в условие голоморфности по ζ, а спиновая связь (8) – в условие однородности степени $2s$. Поэтому, считая $\tilde{\Phi}_+$ всюду определенным по ζ, заключаем, что $s \geq 0$ и $\tilde{\Phi}_+$ – однородный полином степени $2s$, удовлетворяющий вследствие первого условия из (13) безмассовому уравнению Дирака в безиндексной записи [14]:

$$\tilde{p}\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{\Phi}_+ = 0.$$

В "антиголоморфном" случае, соответствующем $s \leq 0$, (14) заменяется на $(\zeta D_\zeta - c - s)\Psi = 0$ и антиголоморфной функцией по ζ является поле $\tilde{\Phi}_- = (\zeta\hat{p}\bar{\zeta})^{c+s}\Phi_-$ степени однородности $-2s$, удовлетворяющее уравнению Дирака $\hat{p}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\tilde{\Phi}_- = 0$.

Как и в массивном случае ζ – индексный спинор. Константа c не сказывается на характеристиках частиц поля, определяя выбор способа полевого описания. Заметим, что поле $\Phi_\pm$ – индексное поле работы [14], где показано, что принцип микропричинности для него выполняется только, если c (полу)целое, $(-)^{2c} = (-)^{2s}$ и $c \geq |s|$.

Предложенная модель спиновой частицы легко обобщается на суперслучай, если в лагранжиане (1) заменить ω-форму на

$$\tilde{\omega}_\mu = \omega_\mu - id\theta\sigma_\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma_\mu d\bar{\theta}, \tag{16}$$

где θ, $\bar{\theta}$ – грассмановы координаты. Отметим, что форма (16) инвариантна относительно глобальных нильпотентных преобразований спиноров $\delta\theta = \epsilon\zeta$, $\delta\zeta = \epsilon\theta$, где ϵ – вещественный безразмерный грассманов параметр. В спектре такой модели получаются произвольные суперспины. В гамильтоновом формализме наряду со связями (3)-(5) имеются ферми-связи $d_\theta = ip_\theta + \hat{p}\bar{\theta}$ и $\bar{d}_\theta$, для которых $\{d_\theta, \bar{d}_\theta\} = 2i\hat{p}$. В массивном случае все спинорные связи – 2-го рода, в безмассовом и четные и нечетные спинорные связи – смесь связей 1-го и 2-го родов. В отличие от суперчастицы КБШ [15], в такой модели как бозонные, так и фермионные спинорные связи легко разделяются по родам с помощью коммутирующей спинорной координаты описанным выше способом (см. (6)). Этот результат имеет место также для расширенной массивной спиновой суперчастицы с центральными зарядами, вводимыми добавлением в лагранжиан весс-зуминовского члена.

Спинорные бозе-координаты фазового пространства модели, ζ и p_ζ, имеют размерность спинорных компонент твисторов ω и v [12]. Поэтому в безмассовом случае интересно выявить связь рассматриваемой спиновой частицы с твисторной формулировкой. Оказывается, что система связей безмассовой спиновой частицы в положительном секторе энергии эквивалентна твисторной связи $p_{\alpha\dot{\alpha}} = p_{\zeta\alpha}\bar{p}_{\zeta\dot{\alpha}}/|j|$, разрешающей светоподобный 4-импульс через спиноры, спиновой связи с "классической" спиральностью j и условию $\zeta p_\zeta + \bar{\zeta}\bar{p}_\zeta = 0$ (конформная связь), которое можно рассматривать как калибровочное по отношению к твисторной связи. Твисторная формулировка с частичным закреплением калибровки посредством последнего условия (конформной связи) и с ненулевой классической спиральностью воспроизводится простой заменой переменных $\omega = |j|^{-1/2}p_\zeta$, $v = |j|^{1/2}\zeta$. Отметим дуальность спинорных связей (5) твисторным соотношениям вида $\omega = \hat{x}\bar{v}$, $\bar{\omega} = v\hat{x}$.

Авторы благодарят Д.В.Волкова и И.А.Бандоса за интерес к работе. Работа частично поддержана грантом U9G000 Международного научного фонда Сороса и фондом ГКНТ Украины по программе фундаментальных исследований.

---

1. Ф.А. Березин, М.С. Маринов, Письма в ЖЭТФ **21**, 678 (1975).
2. L.Brink, S.Deser, B.Zumino et al., Phys. Lett. **B64**, 435 (1976).
3. R.Casalbuoni, Nuovo Cim. **A35**, 377 (1976).
4. В.Д.Гершун, В.И.Ткач, Письма в ЖЭТФ **29**, 320 (1979).
5. P.S.Howe, S.Penati, M.Pernici and P.Townsend, Phys. Lett. **B215**, 255 (1988).
6. A.O.Barut and N.Zanghi, Phys. Rev. Lett. **52**, 2009 (1984).
7. A.P.Balachandran, G.Marmo, A.Stern, and B.-S.Skagerstam, Gauge Symmetries and Fibre Bundles: Application to Particle Dynamics, Lecture Notes in Physics, vol.188 (Springer, 1983).
8. M.S.Plyushchay, Phys. Lett. **B235**, 47 (1990); **B236**, 291 (1990); **B243**, 383 (1990); **B248**, 299 (1990).
9. R.Marnelius and U.Martensson, Nucl. Phys. **B335**, 395 (1991); Intern. J. Mod. Phys. **A6**, 807 (1991).
10. S.M.Kuzenko, S.L.Lyakhovich, and A.Yu.Segal, Preprint TSU-TP-94-8 (hep-th/9403196).
11. Р.Пенроуз, В.Риндлер, Спиноры и пространство-время, т.2, пер. с англ., М.: Мир, 1988 (R.Penrose, W.Rindler, Spinors and space-time, V.2, Cambridge Univ. Press, 1986).
12. Y.Eisenberg and S.Solomon, Nucl. Phys. **B309**, 709 (1988).
13. И.А.Бандос, ЯФ **51**, 1429 (1990).
14. S.O.Fedoruk and V.G.Zima, hep-th/9409117.
15. L.Brink and J.H.Schwarz, Phys. Lett. **B100**, 310 (1981).