Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.4, стр.304 - 308

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕПЕННЫХ СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

В.А.Белавин, Г.В.Колмаков[*1)]

Физический факультет Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова
119899 Москва, Россия

**Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 января 1995 г.

Проведено исследование устойчивости степенных спектров акустической турбулентности в сверхтекучем гелии. Показано, что такие спектры являются неустойчивыми по отношению к изотропным возмущениям и возмущениям, имеющим угловую зависимость первой сферической гармоники. Найдены поправки к распределениям, возникающие в результате развития подобной неустойчивости.

Известно [1,2], что в сверхтекучем гелии в режиме акустической турбулентности возможно возникновение степенных распределений флуктуирующих величин. Такие распределения являются точными стационарными неравновесными решениями соответствующих кинетических уравнений для волн [3] и имеют вид

$$N_{\mathbf{k}},\ n_{\mathbf{k}} \propto k^{s}, \tag{1}$$

где $N_{\mathbf{k}}$, $n_{\mathbf{k}}$ – числа заполнения мод с волновым вектором $\mathbf{k}$ для первого и второго звуков, а s принимает значения $-9/2$ или -4. Спектр с первым показателем формируется в области больших k [2], а со вторым – в области малых k [4]. В данной статье исследуется вопрос об устойчивости таких турбулентных распределений относительно произвольных малых возмущений начальных условий и действия малых сторонних источников.

Непосредственной оценкой вкладов различных нелинейных взаимодействий в интегралы столкновений кинетических уравнений можно показать, что в ротонной области температур гелия ($T \geq 1\,\mathrm{K}$) определяющим является процесс распада волны первого звука на две волны второго звука. С учетом одного только этого процесса кинетические уравнения имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}N_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}(n_1n_2 - N_{\mathbf{k}}n_1 - N_{\mathbf{k}}n_2) + \Gamma_1(\mathbf{k},t),\\
\frac{\partial}{\partial t}n_{\mathbf{k}} = -\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 W_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_1}(n_{\mathbf{k}}n_1 - N_2n_{\mathbf{k}} - N_2n_1) - \\
-\int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}}n_2 - N_1n_{\mathbf{k}} - N_1n_2) + \Gamma_2(\mathbf{k},t),
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \pi|V_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}|^2\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\Omega-\omega_1-\omega_2),$$

$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ – амплитуда указанного взаимодействия, являющаяся однородной функцией k степени 3/2 (см. [5]), $\Omega = c_1k$, $\omega_i = c_2k_i$ $(i = 1,2)$, c_1, c_2 – скорости

[1)] E-mail: german@itp.ac.ru.

первого и второго звуков, $\Gamma_1(k,t)$, $\Gamma_2(k,t)$ – малые внешние источники, и для краткости обозначено $N_i = N_{\mathbf{k}_i}$, $n_i = n_{\mathbf{k}_i}$. В инерционном интервале k-пространства выполняются равенства $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$.

В дальнейшем при исследовании устойчивости будем считать отклонения $\delta N_{\mathbf{k}}(t)$, $\delta n_{\mathbf{k}}(t)$ от стационарного распределения (1) малыми по сравнению с самими величинами $N_{\mathbf{k}}$, $n_{\mathbf{k}}$ (то есть $\delta N_{\mathbf{k}}/N_{\mathbf{k}}$, $\delta n_{\mathbf{k}}/n_{\mathbf{k}} \ll 1$). Поэтому возможно линеаризовать уравнения (2) относительно таких отклонений. Раскладывая их в ряд по сферическим гармоникам Y_{lm}

$$\delta N_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{l,m} \delta N_{lm}(k,t) Y_{lm}(\vec{\nu}),$$
$$\delta n_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{l,m} \delta n_{lm}(k,t) Y_{lm}(\vec{\nu}), \tag{3}$$

где $\vec{\nu} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ – единичный вектор, получаем систему интегро-дифференциальных линейных уравнений относительно функций $\delta N_{lm}(k,t)$, $\delta n_{lm}(k,t)$. В силу начальной изотропии среды эти уравнения оказываются расцепленными относительно индекса l, а зависимость от m вообще выпадает. Исследование устойчивости будет производиться на основании полученной системы уравнений.

В теории присутствует малый параметр, которым является отношение скоростей второго и первого звуков, $\gamma = c_2/c_1$. (Согласно экспериментальным данным, в рассматриваемой области температур величина γ составляет $\gamma \approx 10^{-1}$, см., например, [6]). Это позволяет существенно упростить анализ и использовать адиабатическое приближение. Именно, характерное время изменения распределения второго звука отличается на множитель порядка γ^3 от такого же времени для второго звука. В адиабатическом приближении исключаются функции $\delta N_{lm}(k,t)$, играющие роль быстрых переменных. Полученные после такого исключения уравнения определяют медленную эволюцию возмущений $\delta n_{lm}(k,t)$; вид функции $\delta N_{lm}(k,t)$, может быть однозначно восстановлен для каждого момента времени. Устойчивость этих уравнений может быть исследована при помощи метода, разработанного в [7].

Применяя преобразования Меллина

$$G_{lm}(z,t) = \int_0^\infty dk\, k^{z-s-1} \delta n_{lm}(k,t), \tag{4}$$

получаем уравнения на $G_{lm}(z,t)$, которые имеют вид (индексы l,m опущены)

$$\dot{G}(z-h,t) = W(z)G(z,t) + \Psi(z-h,t), \tag{5}$$

где $\Psi(z,t)$ – меллиновский образ внешнего источника, константа $h = s+5$, где s – показатель степени в исследуемом распределении (1), функция $W(z)$ равна определителю матрицы второго порядка $\hat{W}(z)$ с матричными элементами

$$w_{11} = -\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}(n_1+n_2)k^{-h},$$

$$w_{12}(z) = 2\int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} P_l(\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}_2)(n_1 - N_{\mathbf{k}})n_2 N_{\mathbf{k}}^{-1} k^{z-h} k_2^{-z},$$

$$w_{21}(z) = \int dk_1\, dk_2\, W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}} P_l(\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}_1)(n_{\mathbf{k}} + n_2) N_1 n_{\mathbf{k}}^{-1} k^{z-h} k_2^{-z}, \qquad (6)$$

$$w_{22}(z) = -2 \int dk_1\, dk_2\, W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}} P_l(\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}_2)(n_{\mathbf{k}} - N_1) n_2 n_{\mathbf{k}}^{-1} k^{z-h} k_2^{-z} -$$

$$-2 \int dk_1\, dk_2\, W_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}} (n_2 - N_1) k^{-h},$$

где $P_l(x)$ – полином Лежандра. Функции $w_{ab}(z)$, a, $b = 1, 2$, имеют нулевую степень однородности относительно k.

Устойчивость уравнения (5) определяется критерием Захарова–Балка [8]. Для этого определяется функция вращения $\kappa(\zeta)$ как деленное на 2π приращение комплексного аргумента функции $W(z)$ при движении z от $\zeta - i\infty$ до $\zeta + i\infty$. Функция $\kappa(\zeta)$ принимает лишь целые значения.

Степенное распределение (1) устойчиво относительно начальных возмущений и действия внешнего источника тогда и только тогда, когда существует интервал нулевого вращения Δ_0, $\{\Delta_0 = (\zeta_-, \zeta_+) | \kappa(\zeta) = 0, \zeta \in \Delta_0\}$ и $\kappa(0) = 0$. Достаточным условием неустойчивости является условие $W(0) > 0$. Нули z_p функции $W(z)$ определяют формирующиеся стационарные поправки к распределению,

$$\delta N_{\mathbf{k}},\ \delta n_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}\, k^{s - z_p} Y_{lm}(\vec{\nu}).$$

Интегралы (6), фигурирующие в определении $W(z)$, не могут быть взяты в общем виде при произвольных значениях z. Проверка устойчивости относительно произвольных возмущений производилась авторами путем численной оценки величин $\kappa(0)$ для различных l. При этом функции w_{ab}, $a, b = 1, 2$, были преобразованы к удобной форме: в интегралах, входящих в w_{21} и w_{22}, произведено преобразование Захарова [7], а δ-функции устранены интегрированием по $\mathbf{k}_1$ и модулю $|\mathbf{k}_2|$. Выражение для амплитуды $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ было взято из работы [5].

Авторами были вычислены числа вращения $\kappa(0)$ для $l \le 20$, а также определены нули z_p функции $W(z) : W(z_p) = 0$.

В случае $l = 0$ начало координат лежит на границе интервала нулевого вращения. Это соответствует тому, что амплитуды распределения (1) не фиксируются уравнениями (2).

В результате численной оценки положения нулей z_p функции $W(z)$, удовлетворяющих критерию Фальковича (совпадение знаков потока интеграла движения линеаризованного уравнения, возникающего в результате возникновения поправки $\delta n(k)$ и потока интеграла фонового распределения, см. [9]), получен вид изотропных стационарных поправок:

$$\delta N_k, \delta n_k \propto \begin{cases} k^{-13{,}9}, & k \to 0 \\ k^{-1{,}53}, & k \to \infty \end{cases}. \qquad (7)$$

В случае $l = 1$ полученные результаты различны для разных s. При $s = -4$ вычисления дают $\kappa(0) = 2$, что соответствует неустойчивости распределения (1) на малых k. Оценив величину z_p, получаем стационарную поправку, удовлетворяющую критерию Фальковича:

$$\delta N_{\mathbf{k}},\ \delta n_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}\, k^{-5} \cos\theta, \qquad k \to 0. \qquad (8)$$

Направление в пространстве, от которого отсчитывается полярный угол θ, определяется анизотропией источника.

Для $s = -9/2$ вычислялась величина $\kappa(\epsilon)$, $\epsilon > 0$, $\epsilon \to 0$. В данном случае введение отличной от нуля величины ϵ объясняется следующим образом. Принятый нами модельный линейный закон дисперсии $\Omega_{\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{k}} \propto k$ приводит к равенству $W(0) = 0$ и, следовательно, величина $\kappa(0)$ не определена. Учет распадного характера дисперсии в реальном гелии [10, 11] путем, например, подстановки $\Omega_{\mathbf{k}} = c_1 k^{1+\epsilon}$, $\omega_{\mathbf{k}} = c_2 k^{1+\epsilon}$ $(\epsilon \to +0)$ [7] приводит к сдвигу нулей функции $W(z)$ на малую отрицательную величину порядка $-\epsilon$. В рассматриваемом случае это является существенным, так как в результате начало координат $z = 0$ попадает внутрь интервала нулевого вращения функции $W(z)$. То же самое, очевидно, можно учесть, вычисляя указанную величину $\kappa(\epsilon)$, для которой численная оценка дает нулевое значение. Это указывает на устойчивость турбулентного распределения (1) в области $k \to \infty$ относительно возмущений с $l = 1$. При $l = 2 \div 20$ оценка дает $\kappa(0) = 0$ для обоих значений показателей s.

Таким образом, распределение (1) неустойчиво относительно формирования изотропных поправок и поправок, имеющих форму первой угловой гармоники. По отношению к возмущениям с другими l распределение (1) оказывается устойчивым. Вообще, устойчивость степенных распределений относительно возмущений с большими l гарантируется общей теорией [8]. Поэтому можно заключить, что найденные неустойчивости являются единственными. Формирующиеся стационарные поправки даются соотношениями (7), (8).

В связи с указанной неустойчивостью и ростом отклонений от фонового спектра при $k \to 0$ и $k \to \infty$ может возникнуть вопрос о применимости линеаризованной теории. Анализ положения нулей z_p показывает, что возникающая неустойчивость относится к интервальному типу. Это означает, что поправки к спектру малы на масштабах, близких к масштабу накачки k_p, и растут степенным образом при приближении к концам инерционного интервала [8]. Использование линеаризованных уравнений в данной ситуации основано на том факте, что в реальной системе инерционный интервал (k_0, k_d) конечен $(0 < k_0 < k_p < k_d < \infty)$. Действительно, формирующееся распределение предполагается близким к сумме (1), (7) и (8) внутри инерционного интервала и сильно отличающимся от нее при $k \gg k_d$ и $k \ll k_0$. Таким образом, для применимости линейного приближения требуется, чтобы $\delta N_{\mathbf{k}} \ll N_k$, $\delta n_{\mathbf{k}} \ll n_k$ только внутри инерционного интервала. При выполнении этих условий полученные результаты верны при всех $k \in (k_0, k_d)$.

В противном случае интервал k-пространства, в котором формируется такое распределение, меньше, чем инерционный интервал; он ограничен условиями $\delta N_{\mathbf{k}} \sim N_k$, $\delta n_{\mathbf{k}} \sim n_k$ и всегда содержит область накачки (в силу интервального характера неустойчивости). Для волновых векторов k, достаточно близких к k_p, наблюдаемое распределение будет слабо отличаться от невозмущенного спектра (1).

Интересной особенностью рассматриваемой системы является неустойчивость степенного турбулентного распределения (1) относительно изотропных возмущений, что, вообще говоря, нехарактерно для реальных физических систем. Причиной этого является локальность в k-пространстве процесса нелинейного распада акустической волны на две волны с меньшей скоростью звука. Благодаря указанной локальности меллиновская функция $W(z)$ оказывается мероморфной по всей комплексной плоскости переменной z. Таким образом, все нули z_p лежат в области, в которой преобразование Меллина (4) обратимо и, следовательно, могут формироваться отвечающие им стационарные поправки. В случае нелинейного взаимодействия другого типа нули соответствующей меллиновской функции для $l = 0$ обычно лежат вне этой области, что приводит к невозможности возникновения изотропных степенных поправок к распределению вида (1) [7].

Отметим, что реально формирующееся с учетом стационарных поправок распределение зависит только от абсолютного значения вектора $\mathbf{k}$ при $k \to \infty$ и оказывается неизотропным при $k \to 0$. Физически это происходит вследствие возникновения малого потока импульса (который также является интегралом движения уравнений (2)) в длинноволновую область k-пространства на фоне основного распределения. Угловая зависимость вида (8) на малых k в принципе может быть наблюдаема в эксперименте.

Авторы выражают благодарность В.Е.Захарову, В.Л.Покровскому и И.М.Халатникову за плодотворные обсуждения и интерес к работе. Один из авторов (Г.К.) благодарит Фонд им.Ландау Юлихского Исследовательского Центра (Германия) за финансовую поддержку.

---

1. В.Л.Покровский, Письма в ЖЭТФ **33**, 558 (1991).
2. С.К.Немировский, ЖЭТФ **90**, 2023 (1986).
3. В.Е.Захаров, В сб.: Основы физики плазмы, т.2. Под ред. А.А.Галеева, Р.Судана, М.: Энергоатомиздат, 1984.
4. Г.Колмаков, Препринт ИТФ им.Л.Д.Ландау РАН.
5. В.Л.Покровский, И.М.Халатников, ЖЭТФ **71**, 1974 (1976).
6. J.Wilks, The Properties of Liquid and Solid Helium. Oxford, Clarendon, Press, 1967.
7. V.Zakharov, V.L'vov, and G.Falkovich, Kolmogorov Spectra of Turbulence, vol. 1, Berlin, Springer-Verlag, 1992.
8. А.М.Балк, В.Е.Захаров, В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов, Киев, Наук. Думка, 1990.
9. G.Falkovich, In: Nonlinear Waves. Physics and Astrophysics. Eds. by A.Gaponov, M.Rabinovich, U.Engelbrecht. Berlin, Springer-Verlag, 1990.
10. L.Pitaevskii, J. Low Temp. Phys. **87**, 445 (1992).
11. H.J.Maris and W.E.Massey, Phys. Rev. Lett. **25**, 220 (1970).