Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.6, стр.444 - 448 © 1995г. 25 марта

СВЯЗЬ ЭФФЕКТОВ ААРОНОВА–БОМА И ААРОНОВА–КАШЕРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПИНАХ ЧАСТИЦ

Я.И.Азимов, Р.М.Рындин

Петербургский институт ядерной физики,

188350 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 1995 г.

Изучена связь топологических эффектов Ааронова–Бома и Ааронова–Кашера в зависимости от спина движущейся частицы и его ориентации. Дуальность волновых функций возникает лишь при отсутствии прецессии спина, то есть при определенной, максимальной по абсолютной величине проекции его на нормаль к плоскости движения. Рассмотрено обобщение для частиц, обладающих как зарядом, так и аномальным магнитным моментом. Предложены эксперименты с атомными пучками.

1. Топологические свойства физических систем привлекают сейчас большое внимание как физиков, так и математиков. Наиболее известным примером этого рода является эффект Ааронова–Бома [1], проявляющийся при движении квантовомеханической заряженной частицы в присутствии бесконечно тонкого соленоида. Позднее Ааронов и Кашер [2] привели соображения в пользу того, что существует еще одна конфигурация, дуальная конфигурации Ааронова–Бома. Это движение точечного нейтрального магнитного диполя в поле равномерно заряженной нити. Приближения, использованные в [2], подверглись в литературе [3–5] детальному обсуждению, в том числе критическому. Но недавно Хаген [6] показал, что для частицы со спином 1/2 конфигурации Ааронова–Бома (АБ) и Ааронова–Кашера (АК) ведут к точной эквивалентности амплитуд, хотя АК-сечение имеет иную зависимость от поляризации, чем соответствующее АБ-сечение.

В этой заметке мы развиваем подход Хагена в двух направлениях. Воспроизведя его результаты для спина 1/2 в рамках обычного формализма без использования явного вида матриц Дирака, мы обращаемся к частицам с более высоким спином. Затем мы рассмотрим проблему дуальности для частицы, имеющей как заряд, так и аномальный магнитный момент.

2. Рассмотрим дираковскую частицу в АБ-конфигурации, то есть в поле прямого тонкого соленоида, ориентированного по 3-й оси (оси z). Если волновая функция не зависит от z, то уравнение Дирака принимает вид

$$[i\gamma_0\partial_0 - \gamma_k(i\nabla_k - eA_k) - m]\,\Psi = 0, \qquad (1)$$

где k пробегает лишь значения 1, 2. Это уравнение имеет интеграл движения, который можно описать оператором $\frac{1}{2}\gamma^3\gamma^5$. Его физический смысл очевиден: он равен оператору 3-й проекции псевдовектора спина

$$\xi^\mu = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^5. \qquad (2)$$

Возьмем собственные состояния Ψ_s, для которых

$$\gamma^3\gamma^5\Psi_s = s\Psi_s, \qquad s = \pm 1. \qquad (3)$$

Для них

$$\begin{aligned} \gamma_1\Psi_s &= \frac{1}{s}\gamma_1\gamma^3\gamma^5\Psi_s = \frac{1}{s}\sigma_{02}\Psi_s, \\ \gamma_2\Psi_s &= -\frac{1}{s}\sigma_{01}\Psi_s, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \end{aligned} \tag{4}$$

В результате уравнение (1) принимает вид уравнения Дирака для нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом

$$\left(i\gamma^\kappa\partial_\kappa - m - \frac{\mu}{2}F'^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)\Psi_s = 0 \tag{5}$$

в чисто электрическом поле $E^k = F'^{0k}$:

$$\mu F'^{k\ell} = 0, \quad \mu F'^{01} = \frac{e}{s}A_2, \quad \mu F'^{02} = -\frac{e}{s}A_1, \quad \mu F'^{03} = 0. \tag{6}$$

При этом $\operatorname{div}\mathbf{E}$ пропорциональна $(\operatorname{rot}\mathbf{A})_3$, так что нитеподобный соленоид с запертым внутри него магнитным потоком превращается в нить, несущую равномерно распределенный электрический заряд. Это как раз АК-конфигурация.

Полученные здесь результаты совпадают с результатами [6], причем параметр s приобретает прямой физический смысл интеграла движения, вместо того чтобы быть параметром представления γ-матриц. Соответствие уравнений для АБ- и АК- конфигураций действительно оказывается точным, но лишь в чистых состояниях с определенной проекцией спина $s/2$ на направление соленоида (или заряженной нити). Для состояний, не имеющих определенной проекции спина на нить, переход от АБ к АК (или наоборот) меняет характер интерференции вкладов. Это и порождает различие сечений АБ и АК в [6], при $\mathrm{nz} \neq \pm 1$.

3. Для частиц с более высоким спином ситуация еще больше усложняется.

Рассмотрим частицу со спином 1. Ее поведение во внешнем электромагнитном поле можно описывать уравнением Даффина–Кеммера [7,8]

$$[\beta^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi = 0 \tag{7}$$

для 10-компонентного столбца Ψ. 10×10 матрицы β^μ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\sigma + \beta^\sigma\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\sigma + \beta^\mu g^{\nu\sigma}. \tag{8}$$

Генераторами лоренцевских преобразований Ψ являются матрицы

$$S_{\mu\nu} = i[\beta_\mu, \beta_\nu], \tag{9}$$

которые удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и $\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$.

Введем псевдовектор

$$\xi_\mu = \frac{1}{2i}\epsilon_{\mu\nu\sigma\kappa}\beta^\nu\beta^\sigma\beta^\kappa. \tag{10}$$

Он удовлетворяет соотношениям

$$\beta_0\xi_0\beta_0 = 0, \quad \xi_k\beta_0 = \beta_0\xi_k = \epsilon_{k\ell n}S_{\ell n}\beta_0^2, \quad k,\ell,n = 1,2,3. \tag{11}$$

Поскольку в системе покоя частицы с положительной энергией

$$\beta_0\Psi = \Psi,$$

то ξ_k оказывается для покоящейся частицы псевдовектором спина, а среднее значение ξ_0 обращается в нуль. Таким образом, в системе покоя (а также и в любой другой) ξ_μ дает псевдовектор спина.

Для уравнения Даффина–Кеммера в АБ-конфигурации оператор ξ_3 дает интеграл движения, который имеет, очевидно, физический смысл z-компоненты псевдовектора спина и принимает три значения. По аналогии с (3) возьмем собственные состояния

$$\xi_3\Psi_s = s_3\Psi_s, \qquad s_3 = \pm 1, 0. \tag{12}$$

ξ_3 обладает свойствами

$$\begin{aligned} \xi_3\beta_1 = \ & \beta_1\xi_3 = \ S_{02} + \text{ доп.члены } , \\ \xi_3\beta_2 = \ & \beta_2\xi_3 = \ -S_{01} + \text{ доп.члены } . \end{aligned} \tag{13}$$

Дополнительные члены, действуя на Ψ_s, не зависящую от z, исчезают при $s_3 \neq 0$. Таким образом, при $s_3 = \pm 1$

$$\begin{aligned} \beta_1\Psi_s &= \frac{1}{s_3}\beta_1\xi_3\Psi_s = \frac{1}{s_3}S_{02}\Psi_s, \\ \beta_1\Psi_s &= -\frac{1}{s_3}S_{01}\Psi_s. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти соотношения аналогичны уравнениям (4), но следует подчеркнуть, что они справедливы не при всех допустимых значениях s_3. Используя (14), можно привести уравнение (7) в АБ-конфигурации ($A_0 = A_3 = 0$, $\partial_3\Psi = 0$) к виду

$$\left(i\beta^\kappa\partial_\kappa - m - \frac{\mu}{2}F'^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}\right)\Psi_s = 0, \tag{15}$$

отвечающему АК-конфигурации. Компоненты $F'^{\alpha\beta}$ определяются соотношениями (6) с заменой s на s_3.

4. Рассмотрим частицу с произвольным спином $S > 1/2$. Ее волновую функцию можно описывать биспинором ранга $2S$, симметризованным по всем индексам и удовлетворяющим уравнению

$$[\beta^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\Psi = 0. \tag{16}$$

Здесь

$$\beta_\mu = \frac{1}{2S}\sum_{n=1}^{2S}\gamma^\mu_{(n)}, \tag{17}$$

и каждая дираковская матрица $\gamma^\mu_{(n)}$ действует лишь на n-й индекс Ψ.

Уравнение (16) при $S = 1$ совпадает с уравнением Даффина–Кеммера [7,8]. При $S = 3/2$ оно имеет структуру, аналогичную уравнениям Фирца–Паули [9].

В конфигурации АБ опять возникает интеграл движения, имеющий смысл z-компоненты псевдовектора спина

$$\xi_3 = \sum_{n=1}^{2S}\left(\frac{1}{2}\gamma^3\gamma^5\right)_{(n)}. \tag{18}$$

Он может принимать $2S+1$ значений от $-S$ до $+S$.

Возьмем сначала собственные состояния Ψ_s, для которых

$$\xi_3\Psi_s = sS\Psi_3, \qquad s = \pm 1. \tag{19}$$

Очевидно, они должны быть одновременно собственными состояниями $(\gamma^3\gamma^5)_{(n)}$ для всех значений n

$$(\gamma^3\gamma^5)_{(n)}\Psi_s = s\Psi_s. \tag{20}$$

Используя соотношения типа (4), можем привести уравнение (16) для Ψ_s в АБ-конфигурации к виду

$$\left(i\beta^\kappa\partial_\kappa - m - \frac{\mu}{2}F'^{\alpha\beta}\frac{1}{S}S_{\alpha\beta}\right)\Psi_s = 0, \tag{21}$$

которое опять описывает нейтральную частицу с аномальным магнитным моментом μ в поле (6). Здесь

$$S_{\kappa\delta} = S^2 i[\beta_\kappa, \beta_\delta] = \sum_{n=1}^{2S}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\kappa\delta}\right)_{(n)} \tag{22}$$

являются генераторами лоренцевских преобразований Ψ.

Собственные состояния оператора ξ_3 с собственными значениями S_3 при

$$|S_3| < S$$

не являются собственными состояними $(\gamma^3\gamma^5)_{(n)}$, так что для них конфигурации АБ и АК оказываются неэквивалентными.

5. Обобщим проведенное рассмотрение, предположив, что частица в АБ-конфигурации имеет как заряд e, так и аномальный магнитный момент μ_0. Эта частица описывается уравнением

$$\left[\beta^\kappa(i\partial_\kappa - eA_\kappa) - m - \frac{\mu_0}{2S}F^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta}\right]\Psi = 0 \tag{23}$$

в АБ-конфигурации ($A_0 = A_3 = 0$, $F^{12} = H_3$, $\partial_3\Psi = 0$). Действуя как прежде, для состояний с $S_3 = \pm S$ мы приходим опять к уравнению (21), но с другим полем

$$\mu F'^{01} = \frac{e}{s}A_2, \quad \mu F'^{02} = -\frac{e}{s}A_1, \quad \mu F'^{03} = 0,$$

$$\mu F'^{12} = \mu_0 F^{12}, \qquad \mu F'^{13} = \mu F'^{23} = 0. \tag{24}$$

Таким образом, получается снова движение нейтральной частицы с магнитным моментом, но в поле нити, несущей на себе и равномерно распределенный заряд и, впридачу, содержащей внутри постоянное магнитное поле. Такая конфигурация и ее топологические свойства обсуждались в [10] для заряженной частицы со спином $1/2$.

6. Обсудим кратко полученные результаты. Мы показали, что АБ-конфигурация в точности дуальна АК-конфигурации не только для спина $1/2$, но и для любого спина. Однако такая дуальность справедлива лишь для чистого состояния с проекцией спина $S_3 = S$ или $S_3 = -S$. Для чистых состояний с $|S_3| < S$ или для смешанных состояний дуальность отсутствует.

Заметим, что обе эти ситуации имеют общее свойство: в той или иной форме они содержат прецессию спина. Таким образом, движение частицы в этих случаях не является вполне двумерным, хотя импульс частицы и внешнее поле двумерны. Если же $S_3 = S$ или $S_3 = -S$, то прецессия отсутствует, и движение истинно двумерно. Именно для таких движений возникает дуальность АБ- и АК-конфигураций. Интересно, что этот результат согласуется с исходной работой Ааронова и Кашера [2], где прецессия магнитного момента не учитывалась. Особая роль максимальных (по абсолютной величине) проекций спина проявляется и в структуре АБ-амплитуд рассеяния [11].

Другим интересным свойством является существенное различие нормального и аномального магнитных моментов. АБ-движение частицы, имеющей лишь нормальный момент, соответствует АК-движению в чисто электрическом поле, а учет в АБ-движении аномального момента требует в АК-конфигурации добавления магнитного поля. В результате, простой, казалось бы, случай спиновой частицы с нулевым полным магнитным моментом, оказывается сложным. Действительно, такая заряженная частица имеет как нормальный, так и (компенсирующий его) аномальный моменты. Это значит, что при переходе к АК конфигурации нужно использовать совокупность электрического и магнитного полей.

Полученные здесь результаты могут быть проверены экспериментально. Существование топологического эффекта Ааронова–Кашера было продемонстрировано для спина 1/2 в опытах с нейтронами [12]. Использование в подобных опытах поляризованных пучков нейтральных атомов позволило бы изучить высшие спины и выявить особую роль максимальных проекций спина.

Наш интерес к рассмотренным здесь вопросам возник под влиянием бесед и дискуссий с А.Г.Ароновым, памяти которого мы посвящаем эту работу.

Мы благодарны РФФИ за поддержку (грант 94-02-04039).

---

1. Y.Aharonov and D.Bohm, Phys.Rev. **115**, 485 (1959).
2. Y.Aharonov and A.Casher, Phys.Rev.Lett. **53**, 319 (1984).
3. T.H.Boyer, Phys.Rev. **A36**, 5083 (1987).
4. Y.Aharonov, P.Pearle, and L.Vaidman, Phys.Rev. **A37**, 4052 (1988).
5. A.S.Goldhaber, Phys.Rev.Lett. **62**, 482 (1989).
6. C.R.Hagen, Phys.Rev.Lett. **64**, 2347 (1990).
7. R.J.Duffin, Phys.Rev. **54**, 1114 (1938).
8. N.Kemmer, Proc.Roy.Soc. **173**, 91 (1939).
9. M.Fierz and W.Pauli, Proc.Roy.Soc. **173**, 211 (1939).
10. Xiao-Gang He and B.H.J.McKellar, Phys.Lett. **B256**, 250 (1991).
11. C.R.Hagen, Phys.Rev.Lett. **64**, 503 (1990).
12. A.Cimmino et al., Phys.Rev.Lett. **63**, 380 (1989).