

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О НЕЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ПЛЕНКАХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

С.Н.Дороговец¹⁾

*Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 января 1995 г.

Точно решена задача об эволюции пространственных распределений абрикосовских вихрей в пленках мягких и жестких сверхпроводников второго рода в режиме сохранения магнитного потока. Магнитное поле в вихрях направлено перпендикулярно к плоскости пленки.

Рассмотрим эволюцию магнитного потока в тонкой пластине или пленке сверхпроводника второго рода в ситуации, когда магнитное поле в абрикосовских вихрях направлено перпендикулярно плоскости пленки (см., например, экспериментальную работу [1]). В этом случае [2-4] (в отличие от более простой конфигурации задачи с магнитным полем, параллельным плоскости пластины [5-11]) движение каждого отдельного абрикосовского вихря, оказывается, определяется уже пространственным распределением всех вихрей в системе – нелинейная нелокальная диффузия. Такая диффузия описывается существенно более сложными уравнениями, чем классические уравнения нелинейной диффузии (см., например, учебник [12]). Мы позволим себе сразу же привести уравнение для локальной магнитной индукции $B(x, t)$, с которым далее будем иметь дело (потом мы объясним, каким образом его можно получить):

$$\frac{\partial B(x)}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ |B(x)|^q \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{B(u)}{u-x} \right|^p \operatorname{sign} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{B(u)}{u-x} \right) \right\} \quad (1)$$

(D – размерный коэффициент, $p > 0$, $q \geq 0$ – постоянные). Здесь и далее мы считаем, что бесконечная тонкая пластина сверхпроводника второго рода перпендикулярна оси z , вдоль которой направлена магнитная индукция, задача однородна вдоль оси y , а движение вихрей происходит вдоль оси x , ток протекает вдоль оси y , внешнее магнитное поле отсутствует.

До сих пор задача об эволюции магнитного потока в пленках сверхпроводников второго рода фактически решалась лишь в случае отсутствия зависимости сопротивления потоку от величины магнитного поля [2-4]. При этом в основном проводилось численное исследование линейных уравнений. Ниже будет показано, что в простых ситуациях, когда идет речь об эволюции сохраняющегося магнитного потока (то есть $\int_{-\infty}^{\infty} dx B(x, t) = \text{const}$), может быть найдено точное аналитическое решение задачи именно в самом распространенном и реалистичном случае пропорциональной зависимости сопротивления потоку B (то есть, как мы далее увидим, при $q = 1$). Заметим, что и при

¹⁾e-mail: dorogoy@masha.shuv.pti.spb.su

других q решение удастся описать вполне определенно. В настоящем кратком сообщении мы позволим себе обсудить подробно лишь самый эффективный случай $q = 1$.

Поясним теперь, каким образом можно получить уравнение (1). Во-первых, мы имеем закон Ампера, связывающий $B(x, t)$ и плотность тока $j(x, t)$ в пленке толщиной d (c – скорость света):

$$B(x) = \frac{2d}{c} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{j(u)}{u-x} \quad (2)$$

– преобразование Гильберта [13], которое может быть легко обращено:

$$j(x) = -\frac{c}{2\pi^2 d} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{Bu}{u-x}. \quad (3)$$

Во-вторых, мы имеем уравнение непрерывности для плотности числа вихрей ν ($B = \Phi_0 \nu$, Φ_0 – квант потока): $\partial \nu / \partial t + \text{div}(\mathbf{J}_v) = 0$, где в простейшем случае поток вихрей, пропорциональный электрическому полю, выражается через плотность числа вихрей и их скорость следующим образом: $\mathbf{J}_v = |\nu|v$. Здесь v – скорость вихрей с магнитным полем, направленным вдоль оси z , $-v$ – скорость вихрей, магнитное поле в которых антипараллельно оси z . Для мягкого сверхпроводника [14] $\eta v = (\Phi_0/c)j$, где вязкость η связана с сопротивлением в нормальной фазе ρ_n и верхним критическим полем сверхпроводника H_{c2} следующим соотношением: $\Phi_0/\eta = \rho_n c^2/H_{c2}$. В итоге для мягкого сверхпроводника в обсуждаемой геометрии задачи

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\Phi_0}{c\eta} \frac{\partial}{\partial x} \{|B|j\}. \quad (4)$$

(Это уравнение справедливо и в случае магнитного поля, параллельного поверхности мягкого сверхпроводника – см. [6–8], где подробно обсуждаются причины появления модуля B . Там, однако, j оказывается пропорционально пространственной производной B). Подставляя выражение для j (3) в (4), получим уравнение для B типа (1) с $q = p = 1$ и $D = \Phi_0/2\pi^2 d\eta$. Таким образом, подход, использованный еще в известной работе [15], со стационарной ситуации обобщается на динамическую.

В ряде случаев в режиме крипа потока для жестких сверхпроводников можно считать, что

$$v = l_h \omega_h \left| \frac{j}{j_c} \right|^{U_0/kT} \frac{j}{j_c},$$

где l_h и ω_h – средняя длина и частота прыжков вихрей, U_0 – масштаб энергии барьера пиннинга (см. подробнее в [5]). В результате, снова воспользовавшись уравнением непрерывности и соотношением (3), для эволюции $B(x)$ в жестком сверхпроводнике получаем уравнение (1), в котором $q = 1$, $p = 1 + U_0/kT$, и $D = l_h \omega_h (c/j_c \cdot 2\pi^2 d)^p$. Если перед началом эволюции в образце уже имелось однородное распределение вихрей с ненулевой плотностью $B(x) = B_0$, то для отклонения от B_0 получается уравнение (1) с $q = 0$, и для $p > 1$, то есть для жестких сверхпроводников, "настоящая" линейаризация оказывается невозможной.

Пусть в начальный момент времени в образец инжектирован магнитный поток $\Phi = \int dx B(x) > 0$ ($B(x)$ считается отличным от нуля в ограниченной области около $x = 0$, и, напомним, задача однородна вдоль оси y , так что все соответствующие величины определены в отношении на единицу длины вдоль оси y). Будем искать решение в автомодельном виде: $B(x, t) \propto t^{-\beta} h(x/\text{const}t^\alpha)$. Подставляя это соотношение в (1) и учитывая требование сохранения потока $\Phi = \int dx B(x) = \text{const}$, то есть $\alpha = \beta$, получим

$$B(x, t) = \left(\frac{tD}{\Phi}\right)^{-1/(q+p)} h\left(\frac{x}{(\Phi^{q+p-1}Dt)^{1/(q+p)}}\right), \quad (5)$$

где автомодельная функция $h(x)$ (теперь x – безразмерная переменная) подчиняется уравнению

$$-\frac{1}{q+p} \frac{d}{dx}(xh) = \frac{d}{dx} \left\{ |h(x)|^q \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{h(y)}{y-x} \right|^p \text{sign} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{h(y)}{y-x} \right) \right\}, \quad (6)$$

которое может быть проинтегрировано. (Причина этого удачного обстоятельства – равенство индексов α и β в автомодельном решении в режиме сохранения потока). В итоге для значений x , в которых функция $h(x)$ отлична от нуля, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{h(y)}{y-x} = -\left(\frac{1}{q+p}\right)^{1/p} h^{(1-q)/p}(x) |x|^{1/p} \text{sign}(x). \quad (7)$$

(Константу интегрирования, оказалось, можно опустить, поскольку функция $h(x)$ считалась положительной и симметричной относительно $x = 0$).

Прежде всего заметим, что в области $x \sim 0$

$$h(x) - h(0) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{q+p}\right)^{1/p} h^{(1-q)/p}(0) \text{ctg} \frac{\pi}{2p} x^{1/p}$$

(такое поведение можно получить из (7), используя известные аналитические свойства интеграла Коши [13]). Далее, если $h(x)$ имеет "хвост" на бесконечности, то, так как левая часть (7) ведет себя как $0(1/x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, асимптотика $h(x)$ пропорциональна $|x|^{-(p+1)/(1-q)}$. Значит, при $q \geq 1$ $h(x) = 0$, если $|x| > x_0$, где x_0 – некоторое положительное число. Будем искать решение для $q = 1$ среди таких функций, при этом удобнее перейти от функции $h(x)$, отличной от нуля на интервале $(-x_0, x_0)$, к $h_1(x)$, отличной от нуля при $-1 < x < 1$:

$$h(x) = x_0^{-1/(1-q-p)} h_1(x/x_0), \quad (8)$$

а x_0 найти в конце вычисления.

Обращая преобразование Гильберта (7) по соотношениям для функций, ограниченных на концах конечного интервала [13], получим

$$h_1(x) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p} \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{|y|^{1/p} \text{sign}(y)}{y-x} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p} \right) \sqrt{1-x^2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, 1; \frac{3}{2}; 1-x^2 \right), \quad (9)$$

где $B(\cdot)$ – бета-функция, ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$ – гипергеометрическая функция. Вспомнив, что должно быть $\Phi = \int dx B(x)$, получим

$$x_0 = \pi^{p/(1+p)} (1+p) B^{-1/(1+p)} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p} \right). \quad (10)$$

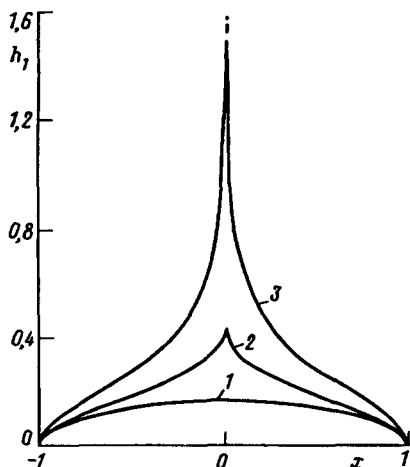
Соотношения (5), (8), (9) и (10) и дают решение задачи в самом интересном для нас случае $q=1$.

На рисунке показаны автомодельные решения $h_1(x)$ для различных p и $q=1$. В частном случае мягкого сверхпроводника $p=q=1$ $h_1(x) = \sqrt{1-x^2}/2\pi$, $x_0 = 2$. При $p \rightarrow \infty$

$$h_1(x) \rightarrow (2/\pi^2) \ln \left| \frac{1 + (1-x^2)^{1/2}}{x} \right|.$$

$x_0 \rightarrow \pi/2$ описывает распространение магнитного потока в жестком сверхпроводнике при низких температурах. (Последний предел имеет аналогичный вид и при других конечных q). При произвольных p и $q=1$ решение (9) вблизи фронтов имеет корневую особенность:

$$h_1(x \sim \pm 1) \cong \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{1+p} \right)^{1/p} \sqrt{1-x^2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p} \right).$$



Автомодельные решения $h_1(x)$ (9) уравнения (1) (см. также соотношения (5) и (8)) с $q=1$, описывающие эволюцию магнитного потока, инжектированного в сверхпроводник второго рода: кривая 1 – $p=1$ (мягкий сверхпроводник), кривая 2 – $p=3$, кривая 3 – предельный случай $p \rightarrow \infty$ (такой же вид имеет предел и при других $q < \infty$)

Из рисунка видно, насколько полученные решения с корневыми фронтами и особенностью в центре отличаются от решения линейного уравнения ($q=0$, $p=1$), в котором $h(x) \propto 1/(x^2 + \pi^2)$. Надо сказать, что к описанному автомодельному виду со временем приходят пространственные распределения потока, имеющие сначала различную форму. Важно, что $\Phi \neq 0$.

Как указал автору А.М.Монахов, уравнения рассмотренного вида должны встречаться также в задачах о диффузии заряженных частиц в проводящих пленках.

Автор благодарен А.Н.Антонову, В.В.Брыксину, А.В.Гольцеву, А.М.Монахову, Б.Н.Шалаеву и Ю.А.Фирсову за многочисленные полезные обсуждения. Он также благодарен Б.Б.Кричевцову, В.В.Павлову и Р.В.Писареву за стимулирующие обсуждения экспериментальной ситуации. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-02-05799.

-
1. C.A.Duran, P.L.Gammel, R.Wolfe et al., *Nature* **357**, 474 (1992).
 2. E.H.Brandt, *Phys. Rev. B* **49**, 9024 (1994).
 3. E.H.Brandt, *Phys. Rev. B* **50**, 4034 (1994).
 4. A.Gurevich and E.H.Brandt, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 178 (1994).
 5. V.V.Vinokur, M.V.Feigel'man, and V.B.Geshkenbein, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 915 (1991).
 6. В.В.Брыксин, С.Н.Дороговцев, *Письма в ЖЭТФ* **57**, 439 (1993).
 7. В.В.Брыксин, С.Н.Дороговцев, *ЖЭТФ* **104**, 3735 (1993).
 8. V.V.Bryksin and S.N.Dorogovtsev, *Physica C* **215**, 173 (1993).
 9. V.V.Bryksin and S.N.Dorogovtsev, *Europhys. Lett.* **24**, 483 (1993).
 10. Z.Koziol and E.P.Chatel, *IEEE Trans. Magn.*, to be published.
 11. J.Gilchrist and C.J. van der Beek, *Physica C*, to be published.
 12. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука (1986), с.284.
 13. Ф.Д.Гахов, *Краевые задачи*, М.: Наука (1977).
 14. Л.И.Ларкин, Ю.Н.Овчинников, *ЖЭТФ* **73**, 299 (1977).
 15. Л.Г.Асламазов, С.В.Лемпицкий, *ЖЭТФ* **84**, 2216 (1983).