Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.7, стр.532 - 536

О МИНИМАЛЬНОЙ ПРИРОДЕ НЕМИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

А.А.Желтухин, В.В.Тугай

Харьковский физико-технический институт, 310108, Харьков, Украина

Научный физико-технологический центр, 310145, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 3 февраля 1995 г.

Показано, что в рамках суперсимметричной электродинамики взаимодействие частиц со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом с полями максвелловского супермультиплета может быть описано на основе обобщенного принципа минимальности. Это дает новый механизм учета электромагнитных взаимодействий фотино с заряженными и нейтральными фермионами посредством их аномального магнитного момента.

Принцип минимальности включения электромагнитного взаимодействия и его обобщение на теории Янга–Миллса является ведущим геометрическим принципом при построении теории взаимодействующих полей [1]. Однако использование одного этого принципа в обычном пространстве Минковского затрудняет описание электромагнитных взаимодействий частиц с аномальным магнитным моментом (АММ). В настоящей работе будет показано, что при переходе к суперпространству $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$, содержащему как обычные пространственные координаты x^μ, так и грассмановы спинорные θ^α, $\bar\theta_{\dot\alpha}$, появляется возможность формулировки обобщенного принципа минимальности, достаточного для описания электромагнитных взаимодействий частиц с АММ.

Хорошо известно, что введение концепции суперпространства z^M позволяет естественным геометрическим путем реализовать ожидаемую суперсимметрию в мире элементарных частиц [2,3]. Принцип суперсимметрии предполагает равноправие обычных пространственных и дополнительных грассмановых координат, вследствие чего стандартный переход от электромагнитного поля $a_\mu(x)$ к суперполю $A_\mu(x,\theta,\bar\theta)$ сопровождается введением дополнительных спинорных связностей $A_\alpha(x,\theta,\bar\theta)$ и $\bar A^{\dot\alpha}(x,\theta,\bar\theta)$. Это позволяет построить инвариантную суперсимметричную 1-форму

$$\omega^M A_M = [dx^\mu - i(d\theta\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu d\bar\theta)]A_\mu + d\theta^\alpha A_\alpha + d\bar\theta_{\dot\alpha}\bar A^{\dot\alpha},$$

где $\omega^M = (\omega^\mu, d\theta^\alpha, d\bar\theta_{\dot\alpha})$ и, записать функционал взаимодействия $S^{(e)}_{int}$ заряженной суперчастицы во внешнем суперполе $A_M = (A_\mu, A_\alpha, \bar A^{\dot\alpha})$ в виде интеграла от указанной 1-формы вдоль мировой линии частицы в суперпространстве [4,5]

$$S^{(e)}_{int} = ie\int d\tau\, \omega^M_\tau A_M(x,\theta,\bar\theta). \tag{1}$$

Использование такой геометрической формулировки эквивалентно обычному принципу минимальности.

Здесь мы хотим обратить внимание на возможность расширения суперполевого функционала (1) посредством удлинения связности A_M, то есть переходом

$$eA_M \mapsto eA_M + i\mu W'_M, \tag{2}$$

где μ – АММ частицы и W'_M – U(1)-инвариантное суперполе, $W'_M \equiv (W'_\mu, W'_\alpha, \bar{W}'^{\dot\alpha})$. Естественными объектами для построения инвариантов W'_M являются компоненты суперполевой напряженности $F_{MN}(x,\theta,\bar\theta)$. Так как константа μ имеет размерность длины $[\mu] = L$ (в системе $\hbar = c = 1$), компоненты суперполя W'_M должны иметь строго фиксированные размерности: $[W'_\mu] = L^{-2}$, $[W'_\alpha] = L^{-3/2}$. Нетрудно проверить, что, в рамках принятых соглашений, из компонент F_{MN} нельзя построить линейный по ним лоренц-вектор W'_μ размерности L^{-2}. В то же время, свертка вида $F_{\mu\dot\alpha}\tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}$ дает инвариантное спинорное суперполе нужной размерности $L^{-3/2}$. Поэтому в качестве инварианта W'_M можно выбрать суперполе W_M вида

$$W'_M = W_M \equiv \frac{i}{4}(0, -\sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}F^{\mu\dot\alpha}, \tilde\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}F_{\mu\alpha}), \tag{3}$$

где $F_{\mu\alpha}$ вместе с другими используемыми здесь величинами определены в [3]. В соответствии с (3), действие (1) принимает вид

$$S^{(e,\mu)}_{int} = i\int d\tau \left[\omega^\mu_\tau e A_\mu + \dot\theta^\alpha\left(eA_\alpha + i\mu W_\alpha\right) + \dot{\bar\theta}_{\dot\alpha}\left(e\bar{A}^{\dot\alpha} + i\mu\bar{W}^{\dot\alpha}\right)\right]. \tag{4}$$

Желая подчеркнуть равноправие суперполей eA_M и $i\mu W_M$ с точки зрения принципа минимальности, введем двухкомпонентные “заряд” $q^\Lambda = (e, i\mu)$ и “связность” $G^\Lambda_M = \begin{pmatrix} A_M \\ W_M \end{pmatrix}$. Тогда действие (4) запишется в более компактной форме:

$$S^{(e,\mu)}_{int} = i\int d\tau\, \omega^M_\tau q^\Lambda G^\Lambda_M, \tag{5}$$

из которой очевидна “e-μ” универсальность, то есть симметрия между парами (e, A_M) и $(i\mu, W_M)$. Удлинение связности (2) приводит к дополнительному сдвигу стандартных “длинных” производных ∇_M [3]:

$$\nabla_M \equiv D_M + eA_M \;\mapsto\; \tilde\nabla_M = D_M + q^\Lambda G^\Lambda_M = D_M + eA_M + i\mu W_M, \tag{6}$$

где $D_M = (\partial_\mu, D_\alpha, \bar{D}^{\dot\alpha})$. Новые расширенные $U(1)$-инвариантные “напряженности” G^Λ_{MN} строятся из $\tilde\nabla_M$ и G^Λ_M по обычным правилам и выражаются с учетом (3) через F_{MN} [3] следующим образом:

$$\begin{aligned}
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\nu} &= eF_{\mu\nu}, \\
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\alpha} &= eF_{\mu\alpha} + i\mu\partial_\mu W_\alpha, \\
q^\Lambda G^\Lambda_{\mu\dot\alpha} &= eF_{\mu\dot\alpha} + i\mu\partial_\mu \bar{W}_{\dot\alpha}, \\
q^\Lambda G^\Lambda_{\alpha\beta} &= eF_{\alpha\beta} + i\mu(D_\alpha W_\beta + D_\beta W_\alpha), \\
q^\Lambda G^\Lambda_{\dot\alpha\dot\beta} &= eF_{\dot\alpha\dot\beta} + i\mu(\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{W}_{\dot\beta} + \bar{D}_{\dot\beta}\bar{W}_{\dot\alpha}), \\
q^\Lambda G^\Lambda_{\alpha\dot\beta} &= eF_{\alpha\dot\beta}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Обобщенные уравнения движения, полученные из полного действия

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau \left[\frac{\omega^\mu_\tau \omega_{\tau\mu}}{g} + gm^2\right] + i\int d\tau\, \omega^M q^\Lambda G^\Lambda_M, \tag{8}$$

где g – множитель Лагранжа, для случая частицы с зарядом e и АММ μ имеют вид

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}\omega_{\tau\mu})^{\cdot} &= i\omega_\tau^M q^\Lambda G_{M\mu}^\Lambda, \\
g^{-1}\omega_{\tau\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha &= -\frac{1}{2}\omega_\tau^M q^\Lambda G_{M\alpha}^\Lambda, \\
g^{-1}\omega_{\tau\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= \frac{1}{2}\omega_\tau^M q^\Lambda G_{M\dot\alpha}^\Lambda.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Для случая массивной частицы эти уравнения упрощаются выбором калибровки $mg=1$, эквивалентной условию $\omega_\tau^\mu\omega_{\tau\mu}=1$. В случае безмассовой частицы – выбором калибровки $\dot g=0$ и условием $\omega_\tau^\mu\omega_{\tau\mu}=0$.

Для анализа уравнений движения суперчастицы в полях физического мультиплета Максвелла в правых частях (9) необходимо учесть уравнения связей [3]: $F_{\alpha\beta}=F_{\dot\alpha\dot\beta}=F_{\alpha\dot\beta}=0$. С учетом этих связей все поля F_{MN} выражаются через спинорные суперполя W_α, $\bar W^{\dot\alpha}=(W_\alpha)^*$ (3), имеющие компонентные разложения

$$
\begin{aligned}
W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y)+\left[\delta_\alpha^\beta D(y)-\frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)_\alpha{}^\beta(\partial_\mu v_\nu(y)-\partial_\nu v_\mu(y))\right]\theta_\beta+ \\
&+\ \theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}(y), \\
\bar W^{\dot\alpha} &= i\lambda^{\dot\alpha}(y^+)+\left[\delta_{\dot\beta}^{\dot\alpha}D(y^+)+\frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}(\partial_\mu v_\nu(y^+)-\partial_\nu v_\mu(y^+))\right]\bar\theta^{\dot\beta}- \\
&-\ \bar\theta\bar\theta\bar\sigma^{\dot\alpha\alpha\mu}\partial_\mu\lambda_\alpha(y^+),
\end{aligned} \tag{10}
$$

где $y=x+i\theta\sigma\bar\theta$, $y^+=x-i\theta\sigma\bar\theta$, v_μ – электромагнитное поле, λ_α – поле фотино и D – вспомогательное поле. В терминах суперполей W_α, $\bar W^{\dot\alpha}$ уравнения движения (9) принимают вид обобщенных уравнений Лоренца

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}\omega_{\tau\mu})^{\cdot} &= -\frac{i}{2}e\omega_\tau^\nu(\bar D\bar\sigma_{\nu\mu}\bar W-D\sigma_{\nu\mu}W)+\dot\theta^\alpha\Xi_{\mu\alpha}+\bar\Xi_{\mu\dot\alpha}\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}, \\
g^{-1}\omega_{\tau\mu}(\sigma^\mu\dot{\bar\theta})_\alpha &= -\frac{i}{2}\left(\omega_\tau^\mu\Xi_{\mu\alpha}+\mu\dot\theta^\beta G_{\beta\alpha}\right), \\
g^{-1}\omega_{\tau\mu}(\dot\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= \frac{i}{2}\left(\omega_\tau^\mu\bar\Xi_{\mu\dot\alpha}+\mu\dot{\bar\theta}_{\dot\beta}G^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{11}
$$

где Ξ, $\bar\Xi$ определяются выражениями

$$
\Xi_{\mu\alpha}\equiv e(\sigma_\mu\bar W)_\alpha+\mu\partial_\mu W_\alpha, \qquad \bar\Xi_{\mu\dot\alpha}\equiv e(W\sigma_\mu)_{\dot\alpha}+\mu\partial_\mu\bar W_{\dot\alpha}.
$$

Нетривиальность нелинейных уравнений (11) состоит в том, что релятивистская частица подвергается действию дополнительных сил, обусловленных взаимодействием с фотино и пропорциональных как ее электрическому заряду, так и АММ μ.

Физический смысл константы μ как АММ-частицы вытекает из анализа действия (4), которое после учета первой пары уравнений Максвелла $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu v_{\nu\rho}=0$ представляется в виде

$$
\begin{aligned}
S_{int}^{(e,\mu)}\Big|_{\substack{e=0,\\ \text{фотон}}} &= i\mu\int d\tau\left[(\dot\theta\sigma^{\mu\nu}\theta)-(\dot{\bar\theta}\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\theta)\right]v_{\mu\nu}+ \\
&+\ \frac{1}{2}\mu\int d\tau\left[\theta\theta(\dot\theta\sigma^\mu\bar\theta)+\bar\theta\bar\theta(\theta\sigma^\mu\dot{\bar\theta})\right]\partial^\rho v_{\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Из остающихся в действии (12) двух слагаемых, второе (содержащее ток $\partial^\rho v_{\rho\mu}$) описывает спин-орбитальное и другие релятивистские взаимодействия, соответствующие следующим членам в разложении по степеням $1/c$. Поэтому физический смысл константы μ можно прояснить, ограничиваясь анализом первого слагаемого в (12). Для этого удобно перейти от пары вейлевских спиноров θ_α, $\dot{\bar{\theta}}^{\dot\alpha}$ и матрицы $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta$ к дираковскому биспинору Ψ и оператору спина релятивистской частицы $\Sigma_{\mu\nu}$ [1]

$$\Psi = \begin{pmatrix} \theta_\alpha \\ \dot{\bar{\theta}}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \tag{13}$$

где γ_μ – матрицы Дирака в вейлевском базисе. Тогда вклад первого слагаемого в действие (12) можно представить в виде стандартного паулиевского члена

$$S_{int}^{(e,\mu)} = \mu \int d\tau \left(\bar\psi \Sigma^{\mu\nu} \psi\right) v_{\mu\nu} + (\text{высшие поправки и другие взаимодействия}). \tag{14}$$

Из этого выражения становится очевидным физический смысл константы μ как АММ-частицы, выраженный в магнетонах Бора.

Таким образом, рассмотренный выше обобщенный принцип минимальности, предполагающий дополнительное удлинение стандартных спинорных ковариантных производных ∇_α и $\bar\nabla_{\dot\alpha}$, действительно описывает вклад АММ в электромагнитные взаимодействия частиц со спином 1/2. Заметим, что такое описание не было выполнено в обычном пространстве-времени x^μ, поскольку требуемое удлинение происходит вдоль спинорных направлений суперпространства. С геометрической точки зрения рассмотренное удлинение (6) аналогично удлинению римановых связностей на тензор кручения. Поэтому можно сказать, что с помощью своего АММ частица "чувствует" кручение суперпространства.

Особо подчеркнем, что действие (9) содержит новые слагаемые, отвечающие электромагнитным взаимодействиям релятивистских частиц со спином 1/2 посредством их АММ с полем фотино $\lambda^\alpha(x)$ (а также со вспомагательным полем $D(x)$). Эти слагаемые приводят к интересным следствиям, в частности, для случая нейтрино. Поскольку нейтрино может быть описано майорановским спинором $\nu(x)$, то в силу (13) и в соответствии с голдстоуновской интерпретацией [2] естественно принять, что $\nu(x) = \begin{pmatrix} \theta_\alpha(x) \\ \bar\theta^{\dot\alpha}(x) \end{pmatrix}$. Тогда, вытекающий из (4) лагранжиан взаимодействий нейтрино запишется в виде:

$$\mathcal{L}_{int}^{\text{нейтрино}} = \mu \left[i\bar\nu\gamma_5\lambda) - (\bar\nu\nu > D - \frac{1}{2}(\bar\nu\gamma_5\gamma_\mu\nu)(\bar\nu\partial^\mu\lambda) \right]. \tag{15}$$

Первое слагаемое в (15) указывает на возможность нейтрино-фотинных осцилляций за счет АММ нейтрино. Учет таких осцилляций может оказаться достаточным для генерации масс у нейтрино и фотино. Тем самым, осцилляции могли бы дать естественный механизм спонтанного нарушения суперсимметрии. Второе слагаемое предполагает альтернативный, аналогичный хиггсовскому механизм генерации массы нейтрино при условии, что вспомогательное поле $D(x)$ имеет ненулевое вакуумное среднее. Наконец, третье слагаемое содержит указание на возможность взаимных переходов фотино в три нейтрино и наоборот.

Авторы благодарят Д.В.Волкова, Ю.А.Пересунько А.П.Рекало и Ю.П.Степановского за обсуждение вопросов, затронутых в работе. Работа частично поддержана грантом RY9000 Международного Научного Фонда Сороса, грантом 93-127, 93-633, 94-2317 по программе INTAS и фондом ГКНТ Украины по программе фундаментальных исследований.

---

1. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, Квантовая электродинамика, М.: Наука, 1969. Л. Б. Окунь, Физика элементарных частиц, М.: Наука, 1984.
2. Д.В.Волков, В.П.Акулов, Письма в ЖЭТФ **16**, 621 (1972).
3. Ю.Весс, Дж.Беггер, Суперсимметрия и супергравитация, М.: Мир, 1986.
4. L.Lusanna and B.Milevski, Nucl. Phys. **B247**, 396 (1984).
5. М. Грин М., Дж.Шварц, Э.Виттен, Теория суперструн, М.: Мир, 1990, т.1.