Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.7, стр.562 - 565 © 1995г. 10 апреля

АКУСТИЧЕСКАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СРЕДАХ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗВУКОВ

Г.Колмаков[1)]

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау,
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 февраля 1995 г.

Изучается состояние волновой турбулентности в средах с двумя акустическими ветвями при учете процесса распада звука высокочастотной ветви на два звука низкочастотной ветви. Показано, что в такой ситуации, кроме прямого каскада, возникает также обратный каскад. Это приводит к установлению степенного турбулентного распределения на малых k. Исследован также процесс установления стационарного распределения. В случае, если скорости звуков в различных ветвях сильно различаются, произведено значительное упрощение кинетических уравнений путем разложения по малому параметру. Показано, что в предположении автомодельного характера формирования спектров стационарный режим на малых k устанавливается за бесконечное время, а на больших k – за конечное время.

В некоторых физических задачах возникает необходимость описания акустической турбулентности в средах, имеющих две звуковые ветви - высокочастотную (ВЧ), со скоростью звука c_1, и низкочастотную (НЧ), со скоростью звука c_2, $c_1 > c_2$ (см., например, [1]). При этом, вообще говоря, должны учитываться многие типы нелинейного взаимодействия между волнами: кроме распадов звуковых колебаний на звуки, принадлежащие той же ветви, возможны также распад ВЧ звука на два НЧ звука, а также черенковское излучение низкочастотного звука высокочастотным.

Однако в некоторых конкретных режимах может оказаться, что основную роль будет играть только один из указанных процессов. В представленной заметке будет исследован случай, когда определяющим является первое из нелинейных взаимодействий между различными акустическими ветвями.

Другая возможная ситуация, когда главный вклад в установление турбулентного режима происходит от черенковского процесса, рассмотрена в [2].

Интересным является случай, когда скорости звука в разных акустических ветвях сильно различаются, то есть для параметра $\gamma = c_2/c_1$ выполняется неравенство $\gamma \ll 1$. Как будет видно из дальнейшего, наличие такого малого параметра позволяет далеко продвинуться в описании нестационарных турбулентных процессов (в том числе формирования неравновесных распределений). В дальнейшем условие $\gamma \ll 1$ предполагается выполненым.

Реальными физическими примерами являются сверхтекучий гелий в ротонной области температур ($T \geq 1\,\mathrm{K}$) [3, 4] и плазма с примесями тяжелых ионов [5] при определенных мощностях накачки энергии в эти системы.

В рассматриваемой ситуации возможно установление степенных турбулентных распределений

$$N_{\mathbf{k}} = A k^s, \quad n_{\mathbf{k}} = B k^s, \tag{1}$$

где $N_{\mathbf{k}}$, $n_{\mathbf{k}}$ – числа заполнения для ВЧ и НЧ мод, зависящие от волнового вектора $\mathbf{k}$, A, B – амплитуды распределений, а s принимает значения из набора $\{-9/2, -4, -1, 0\}$ [1].

[1)]e-mail: german@itp.ac.ru

Как показано в [3], спектр (1) с показателем $s=-9/2$ соответствует формированию независящего от $\mathbf{k}$ потока энергии $\mathcal{E}$ в коротковолновую область,

$$\mathcal{E} = \int d\mathbf{k}\, \Omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} + \int d\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

где $\Omega_{\mathbf{k}}$, $\omega_{\mathbf{k}}$ – законы дисперсии в ВЧ и НЧ ветвях; спектр с показателем $s=-1$ является термодинамически равновесным.

Исследуем распределения (1) с двумя другими значениями s. Рассмотрим вначале случай $s=-4$. Представляя соответствующие кинетические уравнения [1, 3] в дивергентном виде (аналогичном использованному в [6]), можно показать, что возникновение такого распределения связано с наличием дополнительного интеграла $\mathcal{N}$ кинетических уравнений:

$$\mathcal{N} = \int d\mathbf{k}(2N_{\mathbf{k}} + n_{\mathbf{k}}). \tag{3}$$

Знак потока Q этого интеграла в k-пространстве оказывается отрицательным, $Q<0$. Следовательно, такое распределение формируется асимптотически при $k \to 0$. Оценка амплитуд A, B спектра дает: $A, B \propto \sqrt{-Q}$.

Распределение (1) с числами заполнения, не зависящими от k (случай $s=0$), соответствует, как нетрудно видеть, равновесной ситуации. Действительно, общее равновесное распределение в изотропном случае дается формулами

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\Omega_{\mathbf{k}} + \mu}, \quad n_{\mathbf{k}} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}} + \mu'} \tag{4}$$

и характеризуется своей температурой T и химическими потенциалами μ, $\mu' = 2\mu$. В пределе $\Omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}} \ll \mu$ распределение (4) переходит в (1) с амплитудами $A = T/\mu$, $B = T/\mu' = T/2\mu$. Таким образом спектр с $s=0$ реализуется на малых k в отсутствие стационарных потоков интегралов в k-пространстве.

Рассмотрим теперь процесс формирования турбулентного распределения. Наличие малого параметра γ позволяет упростить описание нестационарных процессов в рамках кинетических уравнений для волн. Оценка интегралов столкновений в правых частях таких уравнений показывает, что характерное время τ_1 изменения распределения ВЧ звука мало по сравнению с характерным временем τ_2 для НЧ звука в меру малости γ: $\tau_1/\tau_2 \sim \gamma^3$. Поэтому для описания эволюции турбулентного распределения на временах $t \gg \tau_1$ может быть использовано кинетическое уравнение для функции $n_{\mathbf{k}}$, в котором исключено распределение $N_{\mathbf{k}}$, играющее роль быстрой переменной (адиабатическое приближение). Такое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3\, W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}[(n_{\mathbf{k}} + n_{\mathbf{k}_1})n_{\mathbf{k}_2}n_{\mathbf{k}_3} - (n_{\mathbf{k}_2} + n_{\mathbf{k}_3})n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}_1}]. \tag{5}$$

Вероятность $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}$ определяется как

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = \int d\mathbf{k}_4 \frac{U_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}\mathbf{k}_1} U_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}}{\int d\mathbf{k}_5 d\mathbf{k}_6 U_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}_5\mathbf{k}_6}(n_{\mathbf{k}_5} + n_{\mathbf{k}_6})},$$

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \pi |V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\, \delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}),$$

$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ – амплитуда учитываемого нелинейного процесса. Уравнение (5) по форме совпадает с 4-волновым кинетическим уравнением, записанным для случая одной акустической моды [7]. Таким образом, установление квазиравновесного распределения звука ВЧ моды приводит к появлению эффективного 4-волнового взаимодействия волн другой ветви.

Уравнение (5) имеет интеграл движения $\mathcal{N}_2 = \int d\mathbf{k}\, n_{\mathbf{k}}$. Из этого, а также из наличия интеграла (3), что является точным свойством первоначальных кинетических уравнений, следует, что величины $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{N}_1 = (\mathcal{N} - \mathcal{N}_2)/2$ сохраняются в адиабатическом приближении по отдельности. Уравнение (5) может быть еще более упрощено. В силу малости отношения скоростей звуков γ взаимодействие волн при наличии распадного процесса является локальным в k-пространстве. Как следует из законов сохранения волнового вектора и частоты, ВЧ волна с вектором $\mathbf{k}$ распадается на две НЧ волны с волновыми векторами $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$, такими что $|\mathbf{k}|' \approx |\mathbf{k}|'' \approx |\mathbf{k}|/2\gamma$ [4]. Это позволяет приблизить правую часть уравнения (5) дифференциальным оператором. Ограничимся для простоты случаем изотропного распределения. Раскладывая интеграл в (5) в ряд по γ и учитывая только главный порядок, получаем уравнение

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \Lambda \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} k^{11} n_k^3 \frac{\partial^2}{\partial k^2} n_k^{-1}, \tag{6}$$

Λ – положительная размерная константа, зависящая от термодинамических параметров среды. С той же точностью квазиравновесное распределение ВЧ звука в каждый момент времени дается формулой

$$N_k = n_{k'}/2, \quad k' = k/2\gamma. \tag{7}$$

Критерий применимости уравнений (6), (7) получаем из условия малости опущенных членов в разложении. Он имеет вид

$$\gamma k \frac{\partial n_k}{\partial k} \ll n_k.$$

Таким образом, уравнения (6), (7) применимы, если логарифмическая производная функции n_k по $x = \ln k$ мала по сравнению с величиной γ^{-1}.

Уравнения (6), (7) могут быть использованы для описания процесса формирования стационарных турбулентных распределений. Исследуем процесс установления асимптотик (1) с $s = -4$ при $k \to 0$ и $s = -9/2$ при $k \to \infty$. Обычным является предположение, что вдали от масштаба накачки k_p развитие турбулентности приобретает автомодельный характер. Автомодельная подстановка для n_k дает следующие распределения, зависящие от времени и переходящие в (1) при $k \to k_p$:

$$\begin{aligned} n_k(t) &= t^4 f(kt) \quad &\text{при } k < k_p, \\ n_k(t) &= \tau^9 g(kt^2) \quad &\text{при } k > k_p, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\tau = t_0 - t$, t_0 – время формирования коротковолновой асимптотики распределения, величина которого в принципе определяется из решения уравнения (6). Функции $f(x)$, $g(x)$ обладают свойствами

$$\begin{aligned} &f(x) \propto x^{-4} \text{ при } x \to \infty, \quad &f(x) \to 0 \text{ при } x \to 0, \\ &g(x) \propto x^{-9/2} \text{ при } x \to 0, \quad &g(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) следует, что для выхода на стационарный режим при $k \to 0$ системе требуется бесконечно большое время. В реальном эксперименте инерционный интервал, внутри которого имеет место распределение (1), ограничен снизу обратным линейным размером системы $k_L \sim L^{-1}$. Время t_l, за которое граница распределения (8) при $k < k_p$ достигает масштаба k_l, по порядку величины равно

$$t_l \sim \frac{k_p}{k_L}\tau_2,$$

где τ_2 - характерное время изменения распределения в НЧ моде, оцененное из кинетических уравнений.

Время, требуемое для формирования коротковолновой части распределения, согласно (8), оказывается конечным.

Подобное различие в процессах установления неравновесных турбулентных распределений может быть объяснено следующим образом. Оценка энергии $\mathcal{E}$ распределения (1) показывает, что соответствующие интегралы расходятся при $k \to 0$ как в случае $s = -4$, так и в случае $s = -9/2$. Следовательно, энергосодержащая область находится на малых k. Установление спектра $N_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}} \propto k^{-9/2}$ при $k \to \infty$ требует перераспределения конечного количества энергии и происходит за конечное время. Формирование асимптотики $N_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}} \propto k^{-4}$ при $k \to 0$ приводит к переносу формально бесконечной энергии в длинноволновую область и занимает бесконечное время.

Автор выражает благодарность В.Е.Захарову, В.Л.Покровскому и И.М.Халатникову за плодотворные обсуждения и интерес к работе. Автор также благодарит фонд им. Л.Д.Ландау Юлихского Исследовательского Центра (Германия) за финансовую поддержку.

1. В.Л.Покровский, Письма в ЖЭТФ **53**, 558 (1991).
2. В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, ЖЭТФ **75**, 904 (1978).
3. С.К.Немировский, ЖЭТФ **90**, 2023 (1986).
4. В.Л.Покровский, И.М.Халатников, ЖЭТФ **71**, 1974 (1976).
5. S.Boldyrev, Phys. Lett. A **184**, 450, (1994).
6. В.Е.Захаров, Р.Сагдеев, ДАН СССР **192**, 297 (1970).
7. V.Zakharov, V.L'vov, and G.Falkovich, Kolmogorov Spectra of Turbulence, vol.1, Springer-Verlag, Berlin, 1992.