Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 2, стр. 135 – 138 *20 июля 1974 г.*

О ДИАГОНАЛЬНОСТИ МАССОВОГО ОПЕРАТОРА ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ

В.И.Ритус

На основании аргументов общего характера дается доказательство диагональности точного (вне рамок теории возмущений по внешнему и радиационному полям) массового оператора электрона в постоянном электромагнитном поле. Диагональность массового оператора радикально упрощает изучение радиационных эффектов во внешнем поле и сводит интегродифференциальные уравнения для волновой функции и точной функции Грина к алгебраическим.

В связи с возросшим интересом к электродинамике интенсивного поля [1] и расчетами соответствующих радиационных эффектов [2 – 7] в этой статье на основании аргументов, приведенных в [4, 6], дается подробное доказательство диагональности точного массового оператора электрона в постоянном электромагнитном поле и выписываются диагонализующие его собственные функции.

Как известно, движение электрона во внешнем поле с учетом радиационных поправок описывается модифицированным уравнением Дирака, предложенным Швингером [8]

$$(i\gamma\pi + m)\phi(x) + \int M(x,x')\phi(x')\,d^4x' = 0, \quad \pi_a = i\,\partial_a - e A_a. \tag{1}$$

Функцию $M(x,x')$, описывающую собственноэнергетические эффекты, можно рассматривать как матричный элемент $M(x,x') = (x\,|\,M\,|\,x')$ массового оператора M в координатном представлении. Оператор M является скалярной γ-матричной функцией оператора π_a и поля $F_{\alpha\beta}$. Для постоянного поля $F_{\alpha\beta}$ существуют только четыре независимых скаляра [6]

$$\gamma\pi, \quad \sigma F, \quad (F\pi)^2, \quad \gamma_5 FF^*, \tag{2}$$

от которых может зависеть оператор M. Все остальные скаляры образуются из этих четырех, например, $i\gamma F\pi = \dfrac{1}{4}[\gamma\pi, \sigma F]$, $i\gamma_5\gamma F^*\pi = \dfrac{1}{4}\{\gamma\pi, \sigma F\}$, $F^2 = \dfrac{1}{2}(\sigma F)^2 - \gamma_5 FF^*$ и т.д. Не трудно видеть, что операторы (2), а вместе с ними и массовый оператор, коммутируют с квадрированным оператором Дирака $(\gamma\pi)^2 \equiv \pi^2 - \frac{1}{2} e\sigma F$ и поэтому оператор M диагонален в представлении собственных функций $E_p(x)$ оператора $(\gamma\pi)^2$:

$$(\gamma\pi)^2 E_p = p^2 E_p \qquad (3)$$

Собственное значение p^2 оператора $(\gamma\pi)^2$ может быть любым вещественным числом. Очевидно, что E_p является также собственной функцией еще тех трех коммутирующих с $\gamma\pi$ дифференциальных операторов, собственные значения которых нумеруют решения ψ обычного уравнения Дирака

$$(i\gamma\pi + m)\,\psi = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, для постоянного поля общего вида, векторы **H** и **E** которого в подходящей системе координат направлены вдоль оси 3, а потенциал выбран в виде $A_\mu = (0, Hx_1, -Et, 0)$, существуют четыре оператора

$$(\gamma\pi)^2, \quad -i\partial_2, \quad -i\partial_3, \quad \pi_1^2 + \pi_2^2 - eH\Sigma_3, \qquad (5)$$

которые коммутируют между собой и с массовым оператором и образуют для него полную систему. Совокупность собственных значений

$$p^2, \quad p_2, \quad p_3, \quad 2|eH|k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

операторов (5) будем обозначать буквой p. Операторы (5) коммутируют с Σ_3 и γ_5 (или с $\frac{1}{2}\sigma F = (H + iE\gamma_5)\Sigma_3$) и поэтому их собственные функции различаются еще собственными значениями $s = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$ операторов Σ_3, γ_5.

В так называемом спинорном представлении (см. [9] §§ 17 – 22 и [10] § 8), в котором γ_5 и Σ_3 диагональны, собственные функции $E_{ps\gamma}(x)$ имеют вид

$$E_{ps\gamma}(x) = \frac{e^{i\pi\lambda/4}\,\Gamma(-\lambda)}{(2\pi|E/H|)^{1/4}(n!)^{1/2}}\, e^{i(p_2x_2 + p_3x_3)}\, D_n(\rho) D_\lambda(r)\, w_{s\gamma}, \qquad (7)$$

где $w_{s\gamma}$ — собственные биспиноры матриц Σ_3 и γ_5; в рассматриваемом представлении w_{1-1}, w_{-1-1}, w_{11}, w_{-11} образуют 1, 2, 3, 4 — столбцы единичной четырехрядной матрицы; $D_\nu(z)$ — функции параболического цилиндра с индексами

$$n = k + \frac{seH}{2|eH|} - \frac{1}{2}, \qquad \lambda = -i\,\frac{2|eH|k - p^2}{2|eE|} - \frac{\gamma s eE}{2|eE|} - \frac{1}{2},$$

и аргументами

$$\rho = \sqrt{2|eH|}\left(x_1 - \frac{p_2}{eH}\right), \qquad \tau = e^{i\pi/4}\sqrt{2|eE|}\left(t + \frac{p_3}{eE}\right).$$

Таким образом для данного p четыре биспинора (7) образуют диагональную четырехрядную матрицу $E_p(x)$, составленную из двух диагональных двухрядных матриц ξ_p и η_p

$$E_p = \begin{pmatrix} \xi_p & 0 \\ 0 & \eta_p \end{pmatrix}, \quad [\pi^2 - p^2 - se(H - iE)]\xi_{ps} = [\pi^2 - p^2 - se(H + iE)]\eta_{ps} = 0, \qquad (8)$$

столбцы которых ξ_{ps}, η_{ps}, $s = \pm 1$, являются двухкомпонентными собственными спинорами паулевой матрицы σ_3 и решениями комплексно-сопряженных уравнений (8). Спиноры ξ_{ps} и η_{ps} преобразуются независимо по сопряженным представлениям собственной группы Лоренца и переходят друг в друга при отражениях (так называемые 4-спиноры, см. [9, 10]).

Функции (7) являются положительно-частотными (при $E \to 0$): $E_p = E_{+p}$. Соответствующие отрицательно-частотные функции E_{-p} получаются из них заменой $\tau \to -\tau$.

Функции-матрицы $E_p(x)$ ортогональны и нормированы по условию ($\bar{E}_p \equiv \gamma_4 E_p^+ \gamma_4$, ω — знак частоты):

$$\int \bar{E}_{\omega' p'}(x) E_{\omega p}(x)\, d^4x = (2\pi)^4 \delta(p'^2 - p^2)\,\delta(p_2' - p_2)\,\delta(p_3' - p_3) \times \delta_{k'k}\,\delta_{\omega'\omega}. \qquad (9)$$

Они удовлетворяют условию полноты:

$$\sum_{\pm,k} \int E_{\pm p}(x)\bar{E}_{\pm p}(y) \frac{dp^2 dp_2\, dp_3}{(2\pi)^4} = \delta(x-y). \qquad (10)$$

Решение уравнения Дирака (4) получается действием оператора $m - i\gamma\pi$ на матрицу $E_p(x)$, взятую для $p^2 = -m^2$, и совпадает с решением Никишова [11].

Найденные функции E_p соответствуют полям, для которых оба (или один) инварианта поля отличны от нуля. Для равных нулю инвариантов поля эти функции были найдены в [4, 6]. Диагональность массового оператора существенно упрощает исследование собственно-энергетических эффектов и сводит интегродифференциальное уравнение Швингера (1) к алгебраическому. Точная функция Грина электрона также алгебраически выражается через массовый оператор.

Автор искренне благодарен А.И.Никишову за детальное обсуждение и информацию о свойствах его решений.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академия наук СССР

Поступила в редакцию
19 июня 1974 г.

Литература

[1] J.Schwinger. Phys. Rev. ,D7, 1696, 1973; Asim Yildiz. Phys. Rev., D8, 429, 1973; Wu-Yang, Asim Yildiz. Phys. Rev, D8, 3446, 1973; R.Urban, K.Wittman. Acta Physica Austriaca, 36, 18, 1972.

[2] Н.Б.Нарожный. ЖЭТФ, 55, 714, 1968.

[3] И.А.Баталин, А.Е.Шабад. Препринт ФИАН № 166, 1968.

[4] В.И.Ритус. Письма в ЖЭТФ, 12, 416, 1970.

[5] И.А.Баталин, А.Е.Шабад. ЖЭТФ, 60, 894, 1971.

[6] V.I.Ritus. Ann. of Phys., 69, 555, 1972.

[7] W.Becker, H.Mitter. Preprint Universität Tübingen, 1974.

[8] J.Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 455, 1951.

[9] В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, М., изд. Наука, 1968 г., ч. I .

[10] А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, М., изд. Наука, 1969.

[11] А.И.Никишов. ЖЭТФ, 57, 1210, 1969.