Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 6, стр. 365 – 370 20 сентября 1974 г.

О ДИПОЛЬНОМ ХАРАКТЕРЕ КОЛЛАПСА ЛЭНГМЮРОВСКИХ ВОЛН

Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров

1. Лэнгмюровский коллапс [1] является важным механизмом передачи энергии от лэнгмюровских волн к частицам плазмы; изучение структуры плазменной каверны при коллапсе представляет большой интерес. Ранее уже сообщалось [2, 3], что в ряде случаев может осуществляться коллапс, не обладающий сферической или (в плоском случае) аксиальной симметрией. Результат настоящей работы состоит в установлении того факта, что основную роль в коллапсе играют автомодельно сжимающиеся каверны, внутри которых распределение осциллирующего электрического заряда имеет характер диполя, вытянутого в плоскости, перпендикулярной дипольному моменту.

Как и в [1] будем исходить из системы уравнений для комплексной огибающей высокочастотного потенциала Ψ

$$\nabla\Psi = \frac{3}{8}\,\frac{\mathrm{E}}{\left(2\pi n T_e \dfrac{m}{M}\right)^{1/2}}\,, \qquad \nabla\phi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}\,e^{-i\omega_p t} + \mathrm{E}^* e^{i\omega_p t}\right)$$

и безразмерной вариации плотности

$$n = \frac{3}{8}\,\frac{\delta n}{n_0}\,\frac{M}{m}\,.$$

Здесь ϕ – электростатический потенциал, n_0 – невозмущенная плотность плазмы.

Эти уравнения, записанные в безразмерных переменных

$$t = \frac{4}{3}\,\frac{m}{M}\,\omega_p t\,, \qquad r = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{r}{r_D}\,,$$

$$r_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_0}}$$ – дебаевский радиус ,

имеют вид

$$\begin{gathered}\Delta(i\Psi_t + \Delta\Psi) = \mathrm{div}\,(n\,\nabla\Psi)\,,\\ n_t + \Delta\Phi = 0\,, \quad \Phi_t + n + |\nabla\Psi|^2 = 0\,.\end{gathered} \tag{1}$$

Φ – гидродинамический потенциал.

В случае волн малой амплитуды $|\nabla\Psi|^2 << 1$, $\dfrac{|E|^2}{8\pi} << \dfrac{m}{M}$ система (1) приводится к одному уравнению [1] (статическое приближение)

$$\Delta(i\Psi_t + \Delta\Psi) + \mathrm{div}(|\nabla\Psi|^2\nabla\Psi) = 0. \tag{2}$$

Система (1) сохраняет интегралы

$$I_1 = \int |\nabla \Psi|^2 d\mathbf{r},$$

$$I_2 = \int (\ |\Delta\Psi|^2 + n|\nabla\Psi|^2 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2) d\mathbf{r},$$

а уравнение (2) – интеграл I_1 и $I_2 = \int (|\Delta\Psi|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\Psi|^4)\, d\mathbf{r}$.

Уравнения (1) и (2) имеют общие стационарные решения $\Psi = \phi e^{i\lambda^2 t}$, $\phi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(-\lambda^2\phi + \Delta\phi) + \operatorname{div}(|\nabla\phi|^2 \nabla\phi) = 0. \qquad (3)$$

Умножая (3) на $(\mathbf{r}\nabla\phi^*)$, вкладывая с комплексно-сопряженным и интегрируя, можно установить, что в двумерном случае для стационарных решений $I_2 = 0$; в трехмерном случае $I_2 = \lambda^2 I_1$.

2. Приведем результаты некоторых численных расчетов для системы (1) и уравнение (2). Рассмотрим задачу в прямоугольной области на плоскости (x, y) с краевыми условиями второго рода. Начальное распределение осциллирующего электростатического заряда $\rho = \Delta\Psi$ имеет вид

$$\rho(x, y, 0) = \rho_0 F(x, y) e^{im\theta}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} z^{1/2}; & y < y_0 \\ -z^{1/2}; & y > y_0, \\ 0; & y = y_0,\ z < 0 \end{cases} \qquad z = 1 - \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 \qquad (4)$$

ρ_0, m, a, b – параметры, $\theta = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x - x_0}{y - y_0}$.

В случае системы (1), кроме того, полагаем

$$n(x, y, 0) = -|\nabla\Psi|^2,$$

$$n_t(x, y, 0) = 0,$$

Такое начальное распределение заряда позволяет задавать различные начальные конфигурации каверны. В частности, диполь вытянутый вдоль и поперек дипольного момента, аксиально-симметричную яму плотности с вращающимся полем в центре ($m = 1$) и др. При любых начальных данных (4) качественный характер поведения решения оказался зависящим только от величины интеграла I_2. При $I_2 > 0$ происходит "расплывание" начального распределения. При $I_2 = 0$ решение приблизительно сохраняет форму начального условия. При $I_2 < 0$ как для уравнения (2) так и для системы (1) наблюдается коллапс в виде взрывообразного нарастания амплитуды лэнгмюровских волн и вариации плотности. При коллапсе как в статическом случае (2), так и в "звуковом" случае (1) плазменная каверна быстро становится автомодельно сжимающейся и ее форма не зависит от начального распределения (4). В процессе счета интенсивность лэнгмюровских волн в центре каверны увеличивается без потери точности в несколько десятков раз. На рис. 1, 2 изображен коллапс с начальными условиями (4) при $m = 0$ в статическом и звуковом случае, на рис. 3 – коллапс в статическом случае первоначально аксиально-симметричного распределения с вращающимся полем ($m = 1$).

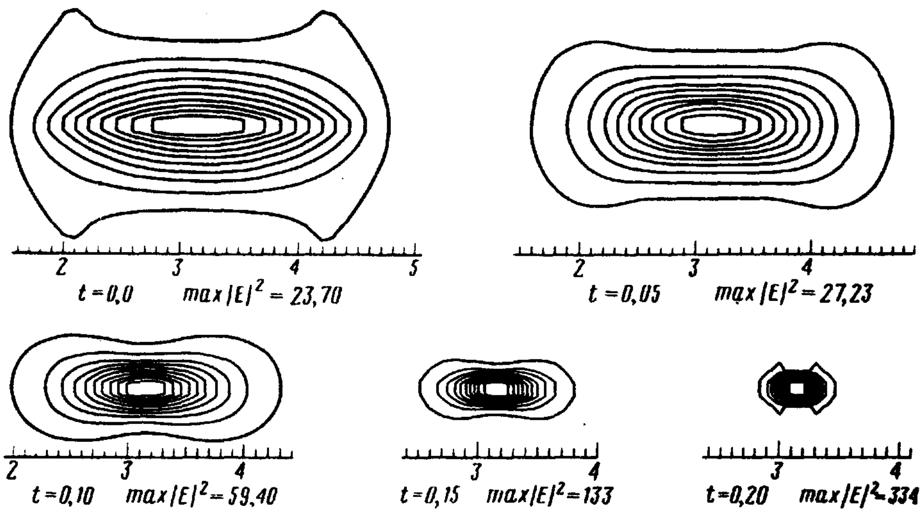

Рис. 1

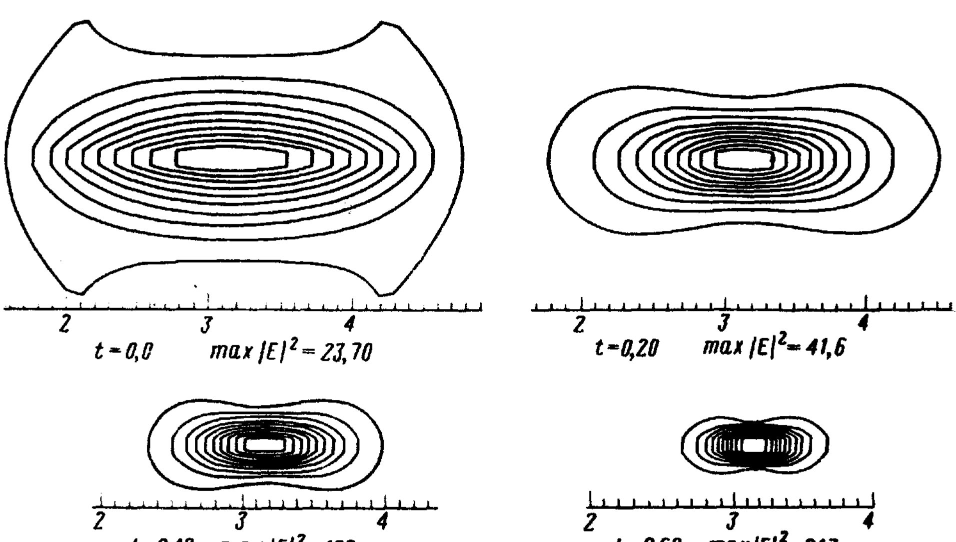

Рис. 2

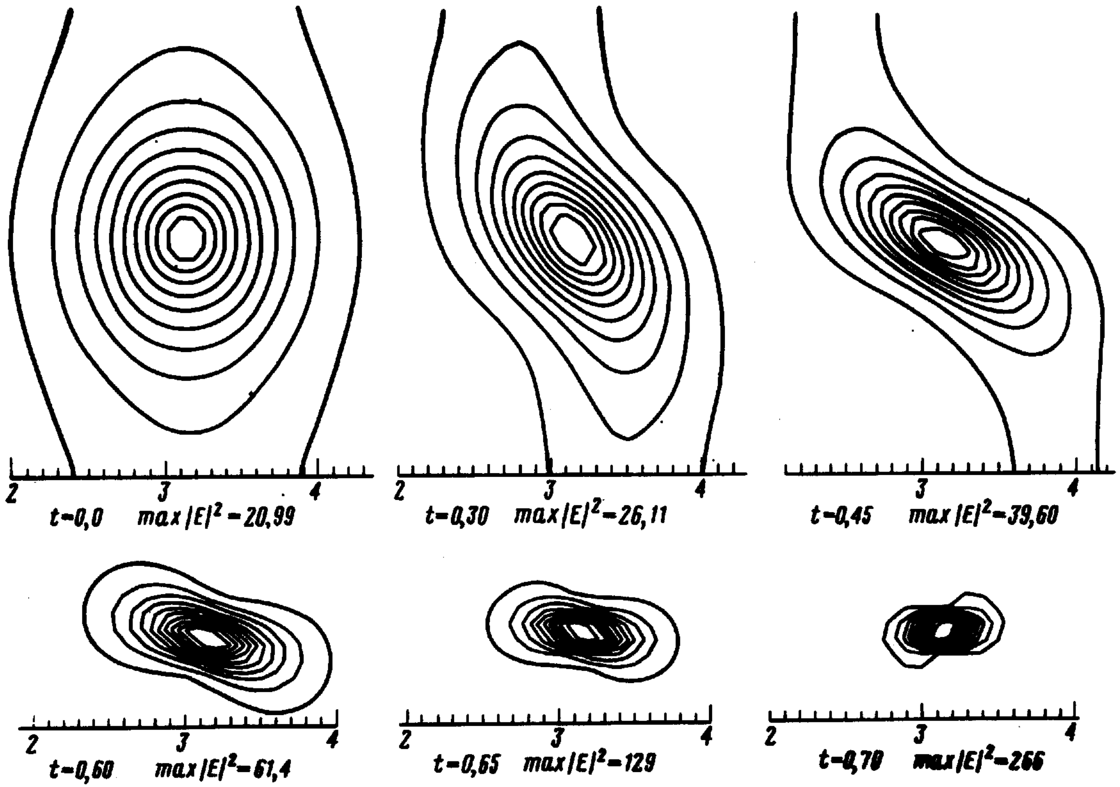
2
3
4
t=0,0 max |E|² = 20,99
2
3
4
t=0,30 max |E|² = 26,11
3
4
t=0,45 max |E|² = 39,60
2
3
4
t=0,60 max |E|² = 61,4
2
3
4
t=0,65 max |E|² = 129
2
3
4
t=0,70 max |E|² = 266

Рис. 3

3. Уравнения (1), (2) в плоском случае не имеют автомодельных решений, пригодных для объяснения результатов численных экспериментов. Они, однако, имеют асимптотические автомодельные решения, точность которых улучшается по мере приближения к точке коллапса.

В статическом приближении такое решение будем искать в виде

$$\Psi = A e^{i\Phi}, \qquad A = \phi\left(\frac{r}{f(t)}\right) + \mathrm{E}_0 \mathrm{r} + \ldots,$$
$$\Phi = \int \frac{dt}{f^2(t)} + f f' \Phi\left(\frac{r}{f(t)}\right) + \ldots . \tag{5}$$

Здесь $\phi(\vec{\xi})$ — вещественное решение уравнения (3), $f(t_0) = 0$; t_0 — точка коллапса. При t близком к t_0 и соответствующем выборе $\Phi(\vec{\xi})$ решение (5) в главных по $1/f$ порядках удовлетворяет уравнению (2). Подставляя (5) в I_2 и учитывая что $\int (|\Delta\phi|^2 - \frac{1}{2} |\nabla\phi|^4 \, d\vec{\xi} = 0$, найдем в главном по $1/f$ порядке

$$a f'^2 - \frac{\beta}{f} = \mathrm{const},$$

$$a = \int [(2\nabla\Phi\nabla\phi + \phi\Delta\Phi)^2 - \phi^2 |\nabla\phi|^2 (\nabla\Phi)^2] \, d\vec{\xi},$$

$$\beta = 2\int (\mathrm{E}_0 \nabla\phi)(\nabla\phi)^2 \, d\vec{\xi}$$

откуда следует

$$f(t) \approx (t_0 - t)^{2/3}.$$

Аналогичное решение [4] было раньше построено в теории самофокусировки.

Из всех решений уравнения (3) в (5) должно осуществляться решение с минимальным значением I_1. Можно предположить, что таковым является решение дипольного типа — аксиально симметричное решение из-за условия $\phi_r(0) = 0$ и немонотонного поведения $|\phi_r(r)|^2$ обладает большим значением I_1.

В рамках системы (1) приближенное автомодельное решение можно получить в случае $n >> 1$, положив

$$\Psi_t \approx i\lambda^2(t)\Psi.$$

Полагая

$$\lambda^2(t) = \frac{1}{(t_0 - t)^2}, \quad \Psi = \phi\left(\frac{\mathrm{r}}{t_0 - t}\right), \quad n = \frac{1}{(t_0 - t)^2} n\left(\frac{\mathrm{r}}{t_0 - t}\right) \tag{6}$$

получим для ϕ, n систему уравнений

$$\Delta(-\phi + \Delta\phi) = \mathrm{div}(n\nabla\phi), \tag{7}$$

$$6n + 6\vec{\xi}\frac{\partial n}{\partial \vec{\xi}} + \xi_a \xi_\beta \frac{\partial^2 n}{\partial \xi_a \partial \xi_\beta} - \Delta n = \Delta |\nabla \phi|^2.$$

Ранее [2] было показано, что система (7) не имеет аксиально симметричных физически разумных решений, однако этот запрет не распространяется на распределения дипольного типа.

Как решение (5), так и решение (6) соответствуют "сильному коллапсу", т.е. попаданию в особенность конечной энергии лэнгмюровских волн и качественно хорошо согласуются с результатами численного эксперимента.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 июля 1974 г.

Литература

[1] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 62, 1745, 1972.

[2] Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.М.Рудаков. Препринт ИПМ №34 за 1974 г. Деп. №1449-74, ЖЭТФ, 68, вып. 1, 1975.

[3] В.Е.Захаров, А.Ф.Мастрюков, В.С.Сынах. Письма в ЖЭТФ, 20, 7, 1974.

[4] В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах. Письма в ЖЭТФ, 14, 564, 1971.