Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 6, стр. 419 – 423 *20 сентября 1974 г.*

О КОЛЛЕКТИВНОМ КВАНТОВОМ ГАМИЛЬТОНИАНЕ И МОДЕЛИ ПЕРЕМЕННОГО МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

В.А.Ходель

Предложен способ нахождения параметров коллективного гамильтониана. Развитые методы применяются к анализу модели переменного момента инерции, достаточно точно описывающей свойства основной полосы возбуждения атомных ядер переходной области.

При исследовании коллективных движений ядра: колебаний вращений – широко используются феноменологические модели, основанные на введении коллективных гамильтонианов с параметрами, взятыми, как правило, прямо из эксперимента. При микроскопическом расчете этих параметров в первую очередь возникает проблема введения коллективных переменных, описывающих рассматриваемый класс возбуждений. Ее решение тривиально, когда взаимодействие между частицами $U(1,2) = \kappa Q_\mu(1)Q_\mu(2)$ (Q (r) – оператор какого-то одного из мультипольных моментов системы). В этом случае коллективным параметром является сам момент Q и вся задача решается в два этапа [1, 2]: сначала находится энергия системы при фиксированном значении Q, а затем учитываются малые колебания по Q. Для построения $E(Q)$ ищется безусловный экстремум функционала $H' = H + \nu\hat{Q}$ и множитель Лагранжа ν определяется так, чтобы $\langle \hat{Q} \rangle = Q$. Слагаемое $\nu\hat{Q}$ можно рассматривать как слабое внешнее поле. Тогда в гармоническом приближении

$$E(Q) - E(0) = -\frac{\nu^2}{2} P(\hat{Q}, \omega = 0) = -\frac{\nu^2}{2} (\hat{Q} G \mathcal{T}(Q) G),$$
$$Q - Q_0 = \nu P(\hat{Q}, \omega = 0). \qquad (1)$$

Здесь P – поляризационный оператор, G – гриновская функция частицы, $\mathcal{T}$ – вершинная часть, уравнение для которой таково [3]

$$\mathcal{T}(V_o) = V_o + \mathcal{U} G \mathcal{T}(V_o) G, \tag{3}$$

где V_o – внешнее поле. Очевидно, что в том случае, когда неприводимый в канале частица-дырка четырехполюсник взаимодействия $\mathcal{U}(1,2,3,4) \approx \kappa Q(1)Q(2)\delta(1,3)\delta(2,4)$, интегральное слагаемое в (3) независимо от вида внешнего поля $V_o(r)$ пропорционально $Q(r)$. Это и позволяет в системе с мультипольным взаимодействием однозначно определить коллективный параметр $\vec{a} = Q(r)$.

Из (2) и (3) следует, что

$$E(Q) - E(O) = C_Q \frac{a^2}{2} + B_Q \frac{\dot{a}^2}{2}, \tag{4}$$

$$C_Q = - P^{-1}(Q, \omega = 0), \quad B_Q = -\left(\frac{dP}{d\omega^2}\right)_{\omega = o} \Big/ P^2(Q, \omega = 0). \tag{5}$$

Справедливость равенства (5) легко проверяется на примере аналитически решаемой задачи одного j-уровня [1]. Уже в этой модели отчетливо виден общий принцип введения коллективных переменных: нужно вводить их так, чтобы исчерпать эффективное поле минимальным числом коллективных параметров. Для упрощения выкладок в общем случае будем считать блок $\mathcal{U}$ потенциальным: $\mathcal{U}(1,2,3,4) \equiv \mathcal{U}(1,2)\delta(1,3)\delta(2,4)$. Тогда эффективное поле $\mathcal{T}(r,r') \sim \delta(r - r')$ зависит только от одного аргумента – от r и его можно разложить по собственным полям системы – собственным функциям $\chi_n(r)$ ядра UGG [4]

$$\lambda_n \chi_n = UGG \chi_n. \tag{6}$$

Поля $\chi_n(r)$ не меняют в среде своей формы: если $V_o(r) = \chi_n(r)$, то согласно (3) и (6) $\mathcal{T}(\chi_n) = \chi_n(r)/(1 - \lambda_n)$. Когда $\mathcal{U}(1,2) \sim Q_\mu(1)Q_\mu(2)$ собственное поле всего одно $\vec{\chi}(r) = Q(r)$, в реальном случае число их бесконечно. В устойчивой системе все $\lambda_n \leqslant 1$. Значение $\lambda_c = 1$ является критическим. Любое возмущение $V_o \sim \chi_c(r)$ бесконечно усиливается в среде, и система меняет свое состояние. Если V_o и χ_c ортогональны, но в системе существуют другие околокритические поля $\chi^o_K(r)$, для которых $(1 - \lambda^o_K) << 1$ и $(V_o \, \bar{\chi}^o_K) = \nu^o_K$, то $\mathcal{T}(r) = \nu^o_K \chi^o_K(r)/(1 - \lambda^o_K)$ + малые добавки. Как мы видим, в этом случае воспроизводится ситуация системы с мультипольными силами взаимодействия – эффективное поле $\mathcal{T}(r)$ имеет универсальную форму $\mathcal{T}(r) \sim \chi^o_K(r)$, а от внешнего поля в ответ входит лишь числовой параметр ν^o_K. Тогда аналогично предыдущему модно ввести оператор коллективной переменной:

$$a = \int \psi^+(r)\, \chi^o_K(r)\, \psi(r) d^3r. \tag{7}$$

Формулы (5) для C и B принимают вид

$$C_a = (1 - \lambda^\circ_K)/(\chi^\circ_K \bar{\chi}^\circ_K), \quad B_a = \left(\chi^\circ_K \left(\frac{dK^\circ}{d\omega^2}\right)_{\omega=0} \chi^\circ_K\right) \Big/ (\chi^\circ_K \bar{\chi}^\circ_K)^2 \qquad (8)$$

где введены обозначения $K^\circ(\omega) = \int G(\epsilon + \omega/2) G(\epsilon - \omega/2)\, d\epsilon/2\pi i$ и $\bar{\chi}^\circ_K = K^\circ(\omega = 0)\,\chi^\circ_K$. Даваемая формулой (8) частота колебаний $\omega_s = (C/B)^{1/2}$ в адиабатическом пределе ($\omega_s << \omega_{s\,p}$) совпадает с той, которая получается прямым вычислением из уравнения для амплитуды перехода [4].

Околокритические собственные поля $\chi^\circ_K(r)$ всегда существуют в системах со спонтанным нарушением симметрии, когда гамильтониан H коммутирует с некоторым оператором $\hat{R}$, а массовый оператор Σ – нет. Для компонент Σ, некоммутирующих с $\hat{R}$ имеет место следующее соотношение [5, 6], являющееся по существу обобщением тождества Уорда на случай нарушения симметрии

$$[\Sigma, R] = UK^\circ(\omega = 0)[\Sigma, R]. \qquad (9)$$

Из (9) вытекает, что в таких системах критическое поле $\chi_c = [\Sigma, R]$. Беря для капли жидкости $\hat{R} = \hat{p}$, получаем $\chi_c = \partial\Sigma(r)/\partial r$, и $\lambda_c = 1$ (частота дипольного возбуждения центра тяжести системы $\omega_1 = 0$). Можно показать, что благодаря условию (9), существует не одно, а целый спектр поверхностных колебаний квантовой капли, аналогичных обычным капиллярным волнам [7]. Методы теории конечных ферми-систем [8] позволяют с помощью (8) и (9) рассчитать коэффициенты C_L и B_L для разных мультипольностей L [7]. Оказывается, что при $L \sim 1$ величины C_L и B_L существенно отличаются от обычно используемых в модели жидкой капли классических значений. Так вдали от замкнутых оболочек квадрупольный массовый коэффициент B_2 оказывается гораздо больше гидродинамического $B_2^h = MA/2$, а жесткость C_2 наоборот меньше C_2^h. (Такое поведение C и B обязаны переходам квазичастиц в незаполненных подоболочках [9]). При некотором числе частиц C_2 может поменять знак, что делает необходимым учет ангармонических членов: $E = E_0 + \frac{C_2}{2}\beta^2 + \frac{D\beta^4}{4} + B\dot{\beta}^2 + E\beta^3\cos 3\gamma \cdots$

Коэффициенты D, E могут быть вычислены на основе тождества Уорда (9) аналогично тому, как в квантовой электродинамике с помощью обычного тождества Уорда находятся амплитуды рассеяния фотона с малым импульсом K. Члены, содержащие β в нечетной степени, как правило, оказываются малы [10]. Если вспомнить, что вдали от магических чисел отношение $B_2/B_2^h > 1$, то можно высказать предположение, что для описания многих свойств ядер переходной области возможно следует вернуться к гидродинамической модели Бора [11], так как ее главное противоречие с экспериментом-малость гидродинамического момента инерций $J = 3B_2\beta^2$, исчезает. Если принять еще, что ядра аксиально симметричны и что массовый коэффициент B_2 слабо зависит от β, то для нахождения спектра основной ротационной полосы нужно минимизировать функционал: $W(\beta) = \frac{C\beta^2}{2} + \frac{D\beta^4}{4} + I(I+1)/2J$, который легко преобразовать к такому виду

$$W = \frac{I(I+1)}{2J} + \frac{K}{2}(J - J_o)^2, \qquad (10)$$

где

$$K = \frac{D}{18B_2^2} \qquad J_o = -\frac{3C_2B_2}{D} \qquad J = 3B_2\beta^2. \qquad (10')$$

Гамильтониан (10) есть гамильтониан модели переменного момента инерции [12, 13], которая успешно описывает спектр основной полосы возбуждений ядер, далеких от магических. Из (10) видно, что для сферических ядер ($C_2 > 0$) момент инерции основного состояния J_o отрицателен, для деформированных $J_o > 0$ ($C_2 < 0$), что и было установлено в [13]. Из (10) следует, что K довольно быстро растет, когда мы приближаемся к магическим числам (массовый параметр B_2 быстро падает). Эта тенденция подтверждается экспериментальными данными (например, по изотопам Ge, Os [12]). В модели переменного момента инерции получается еще и соотношение между матричным элементом Q квадрупольного перехода между основным и первым 2^+ состоянием $Q_{o2} = k\left(\frac{J_o + J_2}{2}\right)^{1/2}$, где k- константа по всем ядрам с точностью до 15–20%. Гидродинамический подход, основанный на формуле (10) дает близкое соотношение $Q_{o2} = 2J_2^2/(3J_2 - J_o)$. Разумеется, классическое по существу описание с помощью (10) является довольно грубым. Квантовые поправки будут исследованы в отдельной работе.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б.Т.Гейликману, В.М.Галицкому, Д.П.Гречухину, А.Б.Мигдалу, Г.А.Пик-Пичаку, Э.Е.Саперштейну, М.А.Троицкому и С.А.Фаянсу за обсуждение работы.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
10 июня 1974г.

Литература

[1] С.Т.Беляев. ЖЭТФ, 39, 1387, 1960.

[2] А.Лейн. Теория ядра. М., изд. Наука, 1967.

[3] А.А.Абрикосов, П.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Применение методов квантовой теории в статистической физике, М., изд. Наука,

[4] В.А.Ходель. Письма в ЖЭТФ, 16, 410, 1972.

[5] H.I.Mikeska, W.Brenig. Z. Phys. 220, 321, 1969.

[6] С.А.Фаянс, В.А.Ходель. Письма в ЖЭТФ, 17, 633, 1973.

[7] В.А.Ходель. ЯФ, 19, 724, 1974.

[8] А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., изд. Наука 1965.

[9] S.T.Beljaev. Kgl. Dansk. Vid. Selsk Mat. fys Medd. 31, 11, 1959.
[10] С.Т.Беляев, В.Б.Зелевинский. ЖЭТФ, 42, 1596, 1962.
[11] O.Bohr. Kgl. Dansk Vid Selsk Mat. Fys. Medd, 26, 14, 1952.
[12] M.Mariscotti, C.Sharf-Goldhaber, B. Buck. Phys. Rev., 178, 1864, 1969.
[13] A.Goldhaber, G.Sharf-Goldhaber. Phys. Rev. Lett., 24, 1349, 1970.