Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 7, стр. 494 – 497　　　*5 октября 1974 г.*

О СПЕКТРЕ СОСТОЯНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ Т'ХУФТА

М.С.Маринов, А.М.Переломов, М.В. Терентьев

Рассмотрена теория взаимодействующих в двумерном пространстве – времени спинорных и векторных полей, инвариантная относительно группы внутренней симметрии $SU(N)$. Взаимодействие – типа Янга–Миллса. В пределе $e^2 \sim N^{-1} \to 0$ (e – константа связи) модель является решаемой. Найден спектр масс системы фермион-антифермион, полученный ранее Т'Хуфтом путем суммирования некоторого класса диаграмм Фейнмана.

Успех кварковой картины вызвал в последнее время усиление интереса к моделям теории поля, где прослеживается основная особенность: с исходным фермионным полем кварков не связано физических состояний, т. е. "кварки не вылетают". В этой связи внимания заслуживают одномерные модели Швингера [1] и Т'Хуфта, [2], так как они содержат механизм, обеспечивающий удерживание кварков. В модели [2], кроме того, возникает эквидистантный спектр связанных состояний.

В настоящей статье мы опишем экономный метод получения спектра частиц в модели [2], позволяющий также легко найти решение в более простой модели [1]. Мы надеемся, что этот метод обладает определенной эвристической ценностью, поскольку в его рамках возможно исследование и других вопросов, в частности рассеяния связанных состояний.

Модель [2] описывает в одномерном пространстве поле Янга – Миллса $(A_\nu)^b_a$, взаимодействующее с полем кварков ψ^a. Здесь a, b – индексы, связанные с внутренней группой симметрии $U(N)$. Лагранжиан имеет вид

$$L = \bar\psi(i\,\partial_\nu\gamma^\nu - m)\psi - e\bar\psi A_\nu\gamma^\nu\psi - \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}, \qquad (1)$$

где

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu,\ A_\nu]. \qquad (2)$$

Модели [2] соответствует предел $N \to \infty$, e^2N – фиксировано. Рассмотрим (1) в переменных на световом конусе. Удобны следующие обозначения $x^\mu \equiv x_0,\ x^1) = 2^{-1/2}(t + z, -t + z)$, $x_\mu = \tilde g_{\mu\nu}x^\nu$, где $\tilde g_{\mu\nu} = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. Если в (1) в качестве символа ∂_ν понимать производную по обычным координатам t, z, то $\gamma^\nu = (\gamma^0, \gamma^1) = (\sigma_2, i\sigma_1)$, $\gamma_5 = \sigma_3$. Переход к конусным координатам осуществляется заменой: $\gamma_\nu \partial_\nu \to \Gamma_\nu \partial/\partial x_\nu$, где

$$\Gamma^\nu = (\Gamma^0, \Gamma^1) = 2^{-1/2}(\gamma_0(1+\gamma_5), -\gamma_0(1-\gamma_5)).$$

Таким образом, в координатах на конусе лагранжиан снова имеет вид (1) следует лишь заменить $\gamma_\nu \to \Gamma_\nu$ и учесть, что опускание индексов осуществляется тензором $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Мы условимся обозначать $(x^0, x^1) \equiv (\tau, \rho)$ и считать τ — "временем", ρ — "координатой".

Пусть $\psi^a \equiv \binom{u^a}{v^a}$. Выберем калибровку $A_1 = -A^0 = 0$. Тогда независимой динамической переменной будет только верхняя компонента u спинора ψ, так как производные по времени τ от A^1 и v не входят в лагранжиан. Исключим A^1 и v с помощью уравнений движения и выразим генераторы трансляций $\mathcal{P}^\nu = \int T^{0\nu} d\rho$ (здесь $T^{\mu\nu}$ — тензор-импульса) в терминах независимой переменной $u^a(\rho, 0)$ при граничных условиях

$$u^a(\pm\infty, \tau) = 0. \qquad (3)$$

Условие (3) необходимо для существования $\mathcal{P}^\nu$ и $\int L d\rho$. Оказывается, что (3) совместно с уравнениями движения и трансляционной инвариантностью только при выполнении условия:

$$Q_a^b = \int_{-\infty}^{\infty} J_a^b(\rho, 0)\, d\rho = 0, \qquad (4)$$

где

$$J_a^b = u_a u^b \equiv (u^a)^+ u^b. \qquad (5)$$

Величины Q_a^b являются генераторами группы симметрии $U(N)$. Равенство (4) является "слабым" в терминологии Дирака [3]. В квантовой теории (4) переходит в условие на состояния, так что реализуются только скалярные представления группы $U(N)$ и, в частности, нет свободных кварков. Условие (4) в классической теории возникает как следствие роста с расстоянием кулоновских сил. Наличие в пространстве нескомпенсированного заряда привело бы к росту поля на бесконечности и отсутствию трансляционной инвариантности.

Положим

$$u^a(\rho, 0) = 2^{-1/4} \sum_{\kappa > 0} (a_\kappa^a e^{i\kappa\rho} + \beta_\kappa^{+a} e^{-i\kappa\rho}), \qquad (6)$$

и выразим $\mathcal{P}^\nu$ в переменных a_κ и β_κ. Переход к квантовой теории осуществляется при наложении обычных условий антикоммутации на величины a_κ и β_κ, рассматриваемые как операторы уничтожения кварка и антикварка. Эти условия возникают из требования

$$\partial u^a(\rho, \tau)/\partial x^\nu = i g_{\nu\mu}[\mathcal{P}^\mu, u^a(\rho, \tau)]. \qquad (7)$$

В квантовой тоерии генераторы $\mathcal{P}^\mu$ имеют вид

$$\mathcal{P}^1 = -\sum_{\kappa > 0} \left\{\frac{m^2}{2\kappa}\left(a_\kappa^{+a} a_\kappa^a + \beta_\kappa^{+a} \beta_\kappa^a\right) + \frac{e^2}{\kappa^2}[J_a^{+b} J_a^b + J_a^b J_a^{+b}\right\}, (8)$$

$$\mathcal{P}^{0} = \sum_{\kappa > 0} \kappa \left(a^{+a}_{\kappa} a^{a}_{\kappa} + \beta^{+a}_{\kappa} \beta^{a}_{\kappa} \right), \tag{9}$$

где операторы

$$J^{a}_{b}(\kappa) = 2^{-1/2} \sum_{q>0} \left[a^{+b}_{q} a^{a}_{q+\kappa} - \beta^{+a}_{q} \beta^{b}_{q+\kappa} + \theta(\kappa - q) \beta^{b}_{\kappa-q} a^{a}_{q} \right] \tag{10}$$

возникают из фурье-разложения тока (5). Величину $H \equiv -\mathcal{P}^{1}$ естественно назвать гамильтонианом, $P \equiv \mathcal{P}^{0}$ – импульсом. Как видно из (8), (9) состояние свободной частицы с массой μ при собственном значении импульса, равном κ, имеет "энергию" $\mu^{2}/2\kappa$.

Пусть $H = H_{0} + V$, где H_{0} не меняет числа частиц и получается из (8) вычеркиванием членов, возникающих после перемножения структур типа $a\beta$ и $a^{+}\beta^{+}$ на структуры типа $a^{+}a$, $\beta^{+}\beta$. Нейтральные состояния типа

$$|\psi(p)\rangle = \sum_{k=0}^{p} \phi(p, k)\, a^{+a}_{k} \beta^{+a}_{p-k} |0\rangle \tag{11}$$

входят в класс допускаемых условием (4) и обладают свойством

$$P|\psi(p)\rangle = p|\psi(p)\rangle, \tag{12}$$

$$H_{0}|\psi(p)\rangle = \epsilon(p)|\psi(p)\rangle, \tag{13}$$

причем (13) является уравнением на собственные значения. Существенно, что $\epsilon(p)$ совпадает с точной энергией, так как является величиной порядка $e^{2}N$, в то время как поправки к ней возникают во втором порядке по V и имеют масштаб $(e^{2}N)^{2}/N$. Из (11) и (13) следует

$$\mu^{2}\left(\frac{e^{2}}{\pi}N\right)^{-1} F(p, x) = \left(1 + \frac{m^{2}}{e^{2}N}\right)\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\right) F(p, x) - \int_{0}^{1} dy \frac{F(p, y) - F(p, x)}{(y-x)^{2}}, \tag{14}$$

где использованы обозначения $\epsilon(p) = \mu^{2}/2p$, $q = xp$, $\phi(p, xp) = F(p, x)$. Это уравнение было получено в работе [2] путем суммирования определенного класса диаграмм Фейнмана. При $\mu^{2} >> e^{2}N$ его нормированные решения находятся в явном виде с использованием граничных условий $F(p, 0) = F(p, 1) = 0$, которые следует наложить для того, чтобы гамильтониан был эрмитовым. Волновая функция оказывается равной

$$F_{k}(p, x) = \sqrt{\frac{8\pi}{pN}} \sin k\pi x, \quad k \text{ – целое число}, \quad k >> 1. \tag{15}$$

Спектр масс имеет вид

$$\mu^{2}_{k} = \frac{e^{2}N}{\pi} k \pi^{2} \tag{16}$$

В принципе, эффект членов в гамильтониане (8), описывающих рождение фермионных пар, может быть учтен с помощью обыкновенной теории возмущений.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
1 августа 1974 г.

Литература

[1] J.Schwinger. Phys. Rev. Lett., 3, 91, 1958.

[2] G.T.Hooft. Nucl. Phys., B75, 461, 1974.

[3] П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. М., изд. Мир, 1970.