Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.2, стр.94 - 98 © 2000г. 25 июля

УШИРЕНИЕ СКАЧКА ТЕПЛОЕМКОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

И.А.Фомин

Институт физических проблем им. П.Л.Капицы РАН
117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 июня 2000 г.

В рамках теории Гинзбурга и Ландау произведен учет влияния случайных неоднородностей на размытие скачка теплоемкости в трехмерных сверхпроводниках для случая, когда это влияние можно считать малым возмущением. Одновременный учет влияния мелкомасштабных и крупномасштабных по сравнению с длиной корреляции неоднородностей позволяет получить конечное и непрерывное в окрестности T_c выражение для зависимости теплоемкости сверхпроводника от температуры.

PACS: 74.25.Bt, 74.62.Dh, 74.70.Tx

1. Переход идеально однородных металлов в сверхпроводящее состояние должен сопровождаться резким (вертикальным на графике $C(T)$) скачком теплоемкости. Неоднородности приводят к размытию скачка [1, 2]. Интерес к описанию размытия вновь возник в связи с исследованием сильно анизотропных и нетрадиционных сверхпроводников – высокотемпературных и тяжелофермионных [3, 4]. В частности, настоящая работа была стимулирована экспериментами по исследованию влияния дефектов на резкость сверхпроводящего перехода в тяжелофермионном соединении UPt_3 [5, 6]. При нетрадиционном спаривании как магнитные, так и немагнитные примеси понижают температуру сверхпроводящего перехода T_c, причем уменьшение T_c пропорционально концентрации примесей [7]. Пространственные флуктуации концентрации примесей приводят к изменению локальной температуры перехода $T_c(\mathbf{r})$. Влияние этих флуктуаций на температурную зависимость теплоемкости вблизи T_c зависит от того, являются ли изменения $T_c(\mathbf{r})$ крупно- или мелкомасштабными по сравнению с корреляционной длиной $\xi(T)$. При $T \to T_c$ длина $\xi \to \infty$. Естественным пределом обрезания служит амплитуда флуктуации температуры δT, флуктуацию можно считать крупномасштабной, если ее пространственный масштаб велик по сравнению с $\xi(\delta T)$. Крупномасштабные изменения могут быть связаны, в частности, с макроскопической неоднородностью образца. В дальнейшем будет считаться, что такая неоднородность отсутствует.

Учет мелкомасштабных флуктуаций при $T < T_c$ дает поправку к теплоемкости, расходящуюся при $T \to T_c$ [1], по этой причине полученная в работе [1] формула может описывать лишь "хвост" флуктуационной добавки к теплоемкости при $T < T_c$. Асимптотика добавки при $T > T_c$ была найдена в работе [2], однако нет формул, которые бы описывали поведение теплоемкости в непосредственной окрестности T_c и осуществляли бы "сшивку" обеих асимптотик. В настоящей работе произведен одновременный учет влияния как крупно-, так и мелкомасштабных флуктуаций $T_c(\mathbf{r})$ на особенность теплоемкости вблизи T_c в том случае, когда эти флуктуации малы. Зависимость $C(T)$ в трехмерном случае описывается конечной и непрерывной функцией, зависящей от статистических свойств случайной функции $T_c(\mathbf{r})$. Заметим, что под T_c здесь подразумевается средняя температура перехода, в окрестности которой и происходит основное изменение теплоемкости. Истинная температура перехода, при которой впервые образуется бесконечный кластер сверхпроводящих областей попадает в область "высокотемпературного хвоста" (см. статью [2]). Особенность теплоемкости при этой температуре не описывается в рамках подхода, основанного на теории возмущений.

2. Во избежание дополнительных усложнений рассмотрим сверхпроводник с однокомпонентным параметром порядка. В этом случае начало вывода повторяет с небольшими изменениями соответствующую часть работы [1]. Функционал Гинзбурга и Ландау записывается в виде

$$F_s - F_n = \nu \int \left\{ \frac{T - T_c}{T} |\psi|^2 + \frac{1}{2} B |\psi|^4 + c |\nabla \psi|^2 \right\} dv, \tag{1}$$

где ν – плотность состояний. Скачок теплоемкости на единицу объема выражается через производную от среднего значения параметра порядка

$$C_s - C_n = -\nu \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{V} \int |\psi|^2 dv \right). \tag{2}$$

На размытие скачка теплоемкости существенно влияют только флуктуации коэффициента при $|\psi|^2$ в разложении (1). Этот коэффициент удобно записать в виде

$$\frac{T - T_c}{T} = \frac{T - < T_c >}{T} + \frac{< T_c > - T_c(\mathbf{r})}{T} \equiv \tau + \zeta(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $< T_c >$ – средняя температура перехода, а $\zeta(\mathbf{r})$ – случайная функция, принадлежащая ансамблю с $< \zeta(\mathbf{r}) > = 0$ и с корреляционной функцией

$$\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}\prime) = < \zeta(\mathbf{r}) \zeta(\mathbf{r}\prime) > . \tag{4}$$

Угловые скобки здесь и в дальнейшем обозначают усреднение по ансамблю. Уравнение Гинзбурга и Ландау, соответствующее функционалу (1), в принятых обозначениях записывается в виде

$$\tau\psi + B\psi|\psi|^2 - \nabla(c\nabla\psi) = -\zeta(\mathbf{r})\psi. \tag{5}$$

Учитывая, что магнитное поле отсутствует, будем считать ψ вещественной функцией. Пространственная неоднородность решения возникает из-за случайного поля $\zeta(\mathbf{r})$, которое считается малым возмущением (критерий будет сформулирован позже). Поле $\zeta(\mathbf{r})$ изменяется на пространственных масштабах порядка $\xi_0 = \hbar v_f / T_c$. В первом приближении по $\zeta(\mathbf{r})$ добавка к параметру порядка имеет тот же масштаб. Спектральная плотность флуктуации $\zeta(\mathbf{r})$ в $\mathbf{k}$-пространстве быстро убывает с уменьшением $\mathbf{k}$ (увеличением масштаба). Простая оценка показывает, что всюду, за исключением пренебрежимо малой окрестности T_c, поправки первого порядка можно считать мелкомасштабными. Поправки второго порядка содержат существенную крупномасштабную компоненту из-за компенсации пространственной зависимости в произведениях фурье-гармоник с противоположными волновыми векторами. Имея в виду существование этих крупномасштабных поправок, введем характерную величину размытия скачка θ, обусловленную крупномасштабными поправками, и соответствующий ей пространственный масштаб $\xi_\theta = \xi_0/\sqrt{\theta}$. Будем предполагать, что размер образца L достаточно велик для того, чтобы удовлетворялись условия $\xi_0 \ll \xi_\theta \ll L$. Связь θ со свойствами функции $\zeta(\mathbf{r})$ будет выяснена в процессе вычислений. Будем искать решение уравнения (5) в виде $\psi = \bar{\psi}(1 + \chi)$, где амплитуда

$\bar{\psi}$ изменяется плавно, а добавка χ описывает мелкомасштабные изменения. Для однозначности разделения потребуем, чтобы $\bar{\chi} = 0$. Черта обозначает усреднение по масштабам порядка ξ_θ. Удерживая в уравнении (5) члены вплоть до второго порядка по $\zeta(\mathbf{r})$ и χ, имеем:

$$\tau\bar{\psi}(1+\chi) + B\bar{\psi}^3(1+3\chi+3\chi^2) - c[\bar{\psi}\Delta\chi + 2\nabla\bar{\psi}\nabla\chi + (1+\chi)\Delta\bar{\psi}] = -\zeta\bar{\psi}(1+\chi). \quad (6)$$

Усреднение уравнения (6) по масштабам $\sim \xi_\theta$ дает

$$c\Delta\bar{\psi} = \tau\bar{\psi} + B\bar{\psi}^3(1+3\overline{\chi^2}) + \bar{\psi}\overline{\zeta(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})}. \quad (7)$$

Локальная температура перехода, определяемая как температура, при которой $\bar{\psi} = 0$, оказывается сдвинутой от средней на величину (ср. [1])

$$\tau_0 = -\overline{\zeta(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})}|_{\bar{\psi}=0}. \quad (8)$$

Полагая в уравнении (7) $t = \tau - \tau_0$, приведем его к виду

$$c\Delta\bar{\psi} = t\bar{\psi} + B\bar{\psi}^3(1+3\overline{\chi^2}) + (\tau_0 + \overline{\zeta(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})})\bar{\psi}. \quad (9)$$

Для вычисления $\overline{\zeta\chi}$ и $\overline{\chi^2}$ следует выписать уравнение для быстро изменяющихся, линейных по $\zeta(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$ членов

$$t\chi + 3B\bar{\psi}^2\chi - c\Delta\chi = -\zeta(\mathbf{r}) \quad (10)$$

и разрешить его относительно $\chi(\mathbf{r})$. Это можно сделать, например, перейдя к фурье-образам

$$\zeta_\mathbf{k} = \int \zeta(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d^3r; \quad \chi_\mathbf{k} = \int \chi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d^3r.$$

В результате имеем

$$\tau_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\zeta_\mathbf{k}\zeta_{-\mathbf{k}}}{ck^2}. \quad (11)$$

Чтобы связать τ_0 со статистическими свойствами ансамбля $\zeta(\mathbf{r})$, рассмотрим уравнение Шредингера для частицы с массой $m = \hbar^2/2c$, движущейся в потенциале $\zeta(\mathbf{r})$:

$$-c\Delta\psi + \zeta(\mathbf{r})\psi = \varepsilon\psi, \quad (12)$$

и будем рассматривать в нем $\zeta(\mathbf{r})$ как возмущение [8]. Сдвиг τ_0 с точностью до знака совпадает с первой неисчезающей поправкой ε_0 к собственному значению $\varepsilon = 0$. Ансамбль потенциалов $\zeta(\mathbf{r})$ порождает "плотность сдвигов" $g(\varepsilon_0)$, она по определению связана с плотностью состояний $\rho(\varepsilon)$ на интервал $d\varepsilon$ соотношением

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2c^{3/2}}\int_{-\infty}^{\varepsilon} g(\varepsilon_0)\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0}\,d\varepsilon_0. \quad (13)$$

Это – интегральное уравнение относительно $g(\varepsilon_0) \equiv g(x)$ стандартного типа, его решение можно записать в виде

$$g(x) = 2\pi c^{3/2}\int_{-\infty}^{x}\frac{\rho''(z)dz}{\sqrt{x-z}}, \quad (14)$$

штрих обозначает дифференцирование. Исследованию плотности состояний для уравнения Шредингера со случайным потенциалом посвящена обширная литература (см. библиографию в книге [9]). Формула (14) позволяет найти нужную для дальнейших вычислений "плотность сдвигов" $g(x)$ по известной плотности состояний $\rho(\varepsilon)$. Интервал $\Delta\tau_0$, в котором функция $g(-\tau_0)$ существенно отличается от нуля, и играет роль введенной ранее величины размытия скачка θ. Для других входящих в уравнение (9) средних имеем:

$$\overline{\zeta(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})}+\tau_0=-2t\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{-\mathbf{k}}}{ck^2(ck^2-2t)};\quad \overline{\chi^2}=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{-\mathbf{k}}}{(ck^2-2t)^2}. \qquad (15)$$

Как и в работе [1], в силу быстрой сходимости интегралов можно заменить $\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{-\mathbf{k}}$ на $\phi_0=\int\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$, после чего интегралы в правых частях вычисляются. При не зависящем от координат t уравнение (9) имеет стационарные решения $\bar{\psi}=0$ и

$$\bar{\psi}^2=-\frac{t}{B}\left(1-\frac{7}{8\pi}\frac{\phi_0}{c^{3/4}\sqrt{(-2t)}}\right)$$

при $t<0$. При изменении t с масштабом, много большим, чем ξ_θ, можно пренебречь вкладом "скруглений", возникающих на поверхностях $t=0$, в $\int|\psi|^2dv$ и решение уравнения (9) почти всюду можно приблизить указанными стационарными решениями

$$\bar{\psi}=0 \quad \text{при } t>0, \qquad \bar{\psi}^2=-\frac{t}{B}\left(1-\frac{7}{8\pi}\frac{\phi_0}{c^{3/4}\sqrt{(-2t)}}\right) \quad \text{при } t<0. \qquad (16)$$

Для вычисления теплоемкости нужно знать $\overline{\psi^2}=\bar{\psi}^2(1+\overline{\chi^2})$. Комбинируя (15) и (16), получим

$$\overline{\psi^2}=0 \quad \text{при } t>0, \qquad \overline{\psi^2}=-\frac{t}{B}\left(1-\frac{3}{4\pi}\frac{\phi_0}{c^{3/4}\sqrt{(-2t)}}\right) \quad \text{при } t<0. \qquad (17)$$

Решение для $t<0$ совпадает с полученным ранее Ларкиным и Овчинниковым с той разницей, что температура здесь отсчитывается от локальной температуры перехода τ_0. Окончательное усреднение по ансамблю или по объему образца осуществляется с плотностью $g(-\tau_0)$:

$$<\psi^2>=\int_{-\infty}^{+\infty}g(-\tau_0)\overline{\psi^2}(\tau-\tau_0)d\tau_0. \qquad (18)$$

После вычисления производной $\partial<\psi^2>/\partial\tau$ и естественных преобразований получаем следующее выражение для зависимости теплоемкости в зоне размытия скачка от приведенной температуры τ:

$$C_s=C_n+\frac{\nu}{B}\int_0^\infty\left(1-\frac{3\phi_0}{2\pi(2c)^{3/2}\sqrt{u}}\right)g(-\tau-u)du. \qquad (19)$$

Интегрирование с весом $g(-\tau-u)$ устраняет корневую особенность во втором члене под интегралом и делает выражение конечным. Формула (19) решает поставленную задачу, она выражает зависимость теплоемкости от температуры вблизи T_c через нулевую фурье-гармонику корреляционной функции (4) – ϕ_0 и через функцию $g(\tau)$, связанную с плотностью состояний $\rho(\varepsilon)$ для случайного потенциала $\zeta(\mathbf{r})$ соотношением (14).

3. При выводе формулы (19) случайная функция $\zeta(\mathbf{r})$ считалась малым возмущением. Условием применимости полученной формулы является поэтому $\phi_0/c^{3/2}\sqrt{\theta}\ll 1$. Для грубой оценки будем считать $\theta\sim\tau_0$, тогда это условие сводится к $(\phi_0/\xi_0^3)^{1/2} \ll 1$. Для случайно распределенных примесей

$$\phi_0 = \frac{1}{T_c^2}\left(\frac{dT_c}{dn}\right)^2 \bar{n},$$

где dT_c/dn – производная критической температуры по концентрации примесей, подавляющих сверхпроводимость. В результате критерий применимости может быть записан как

$$\frac{\Delta T_c}{T_c}\frac{1}{\sqrt{n\xi^3}} \ll 1.$$

Здесь ΔT_c – уменьшение средней температуры перехода под действием примесей. Для нетрадиционных сверхпроводников сформулированный критерий выполнен всегда. Поведение теплоемкости в непосредственной окрестности T_c определяется, в основном, функцией $g(\tau)$. В пределе $|\tau| \gg \theta$ при $T < T_c$ формула (19) переходит в формулу (13) из работы [1]. Асимптотика $|\tau| \gg \theta$ при $T > T_c$ отличается от полученной в работе [2] отсутствием множителя $\overline{\psi^4}/(\overline{\psi^2})^2$. Отличие возникло из-за того, что размытие скачка в непосредственной окрестности T_c определяется крупномасштабными флуктуациями. Для таких флуктуаций параметр порядка близок к постоянной величине, а указанный множитель близок к единице. На хвосте размытия скачка основную роль играют флуктуации с масштабом $\sim \xi$, и отличие $\overline{\psi^4}/(\overline{\psi^2})^2$ от единицы становится существенным. Заметим, однако, что и в этом случае речь идет лишь о предэкспоненциальном множителе порядка единицы.

Обобщение формулы (19) на случай многокомпонентного параметра порядка производится непосредственно, если фактически реализуется одна сверхпроводящая фаза или если переходы в разные фазы хорошо разделены по температуре. В случае UPt_3 наблюдаются два близких перехода, причем эти переходы сливаются по мере увеличения количества дефектов. Для согласованного описания обоих скачков требуется учет в функционале (1) членов порядка $|\psi|^6$. Такие вычисления еще не проделаны, что затрудняет сравнение полученных формул с имеющимися данными для UPt_3.

Основная часть настоящей работы была выполнена в Институте французского комиссариата по атомной энергии в Гренобле. Я благодарен Ж.Флуке за гостеприимство в этом институте и за стимулирующие обсуждения, университету им. Жозефа Фурье за финансовую поддержку моего пребывания в Гренобле, Ж.-П. Бризону за сотрудничество и А.И.Ларкину и Ю.Н.Овчинникову за обсуждения и полезную критику.

---

1. А.И.Ларкин, Ю.Н.Овчинников, ЖЭТФ **61**, 1221 (1971).
2. Б.Л.Иоффе, А.И. Ларкин, ЖЭТФ **81**, 707 (1981).
3. Yu.N.Ovchinnikov and V.Z.Kresin, Europhys. Lett. **46**, 794 (1999).
4. Yu.N.Ovchinnikov, S.A.Wolf, and V.Z.Kresin, Phys. Rev. **B60**, 4329 (1999).
5. J.-P.Brison, H.Suderow, P.Rodière et al., Physica **B281-282**, 872 (2000).
6. R.J.Keizer, A.de Visser, M.J.Graf et al., Phys. Rev. **B 60**, 10527 (1999).
7. А.А. Абрикосов, Л.П.Горьков, ЖЭТФ **39**, 1781 (1960)
8. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика*, Москва, Наука, 1974, стр. 192.
9. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос, *Электронные свойства легированных полупроводников*, Москва, Наука, 1979.