Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.2, стр.130 - 135 © 2000г. 25 июля

ДВУХЧАСТИЧНЫЕ СПИНОВЫЕ СОСТОЯНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ НЕРАВЕНСТВА БЕЛЛА

В.А.Андреев, В.И.Манько[1)]

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН 117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2000 г.

Развит новый формализм для вычисления величины спиновой корреляции. В этом подходе среднее значение оператора, действующего в 4-мерном пространстве двухчастичных спиновых состояний, имеет вид скалярного произведения векторов, заданных в 3-мерном пространстве направлений. С его помощью дано полное описание двухчастичных спиновых состояний для которых выполняются неравенства Белла. Показано, что среди них имеются как факторизуемые, так и перепутанные состояния.

PACS: 03.65.Bz

Парадокс Эйнштейна – Подольского – Розена (ЭПР) [1, 2] часто формулируют в терминах неравенств Белла [3, 4], в проверке которых и состоит сравнение теории с экспериментом. Именно в связи с неравенствами Белла большое внимание привлечено к двухчастичным квантовым состояниям и вопросу, для каких из них неравенства Белла выполняются, а для каких нет [5 – 14]. Был выделен специальный класс "перепутанных" состояний, которые являются существенно квантовыми объектами и именно на которых, как предполагалось, и нарушаются неравенства Белла.

В работе дано полное описание двухчастичных спиновых состояний, для которых выполняются неравенства Белла. Показано, что перепутанные состояния также входят в их число. При этом мы пользуемся обычной формулировкой квантовой механики и задаем квантовые состояния с помощью волновых функций и матриц плотности. Томографическое описание одночастичных спиновых состояний дано в работах [15, 16], для двухчастичных состояний аналогичная задача решалась в работе [17], а в работе [18] проводится обсуждение парадокса ЭПР в терминах квантовой томографии.

Пусть имеется одно спиновое состояние, такое, что направление спина вверх по оси Z обозначается $|+\rangle$, а вниз по оси Z – $|-\rangle$. На этих векторах спиновые операторы задаются соотношениями

$$S_x|+\rangle = \frac{1}{2}|-\rangle,\ \ S_x|-\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle,\ \ S_y|+\rangle = \frac{i}{2}|-\rangle,\ \ S_y|-\rangle = -\frac{i}{2}|+\rangle, \tag{1}$$

$$S_z|+\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle,\ S_z|-\rangle = -\frac{1}{2}|-\rangle\ .$$

Оператор $\hat{a}$ удвоенной проекции спина на направление, задаваемое вектором $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, имеет вид

$$\hat{a} = 2(\mathbf{a}, \mathbf{S}) = 2(a_xS_x + a_yS_y + a_zS_z)\ . \tag{2}$$

Для двухчастичных состояний можно определить оператор [4]

$$\hat{a}\otimes\hat{b} = 4(\mathbf{a}, \mathbf{S}^{(1)})\otimes(\mathbf{b}, \mathbf{S}^{(2)})\ , \tag{3}$$

[1)] e-mail: manko@astra.na.astro.it

определенный в 4-мерном линейном пространстве, натянутом на базисные вектора:

$$\Psi_{++} = |(1)+\rangle|(2)+\rangle,\quad \Psi_{+-} = |(1)+\rangle|(2)-\rangle, \tag{4}$$
$$\Psi_{-+} = |(1)-\rangle|(2)+\rangle,\quad \Psi_{--} = |(1)-\rangle|(2)-\rangle.$$

Оператор (3) соответствует наблюдаемой величине, называемой спиновой корреляцией. Изучим его свойства. В базисе (4) оператор (3) имеет вид матрицы:

$$\hat{a} \otimes \hat{b} = \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} a_z b_z & a_z(b_x - ib_y) & (a_x - ia_y)b_z & (a_x - ia_y)(b_x - ib_y) \\ a_z(b_x + ib_y) & -a_z b_z & (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) & -(a_x - ia_y)b_z \\ (a_x + ia_y)b_z & (a_x + ia_y)(b_x - ib_y) & -a_z b_z & -a_z(b_x - ib_y) \\ (a_x + ia_y)(b_x + ib_y) & -(a_x + ia_y)b_z & -a_z(b_x + ib_y) & a_z b_z \end{pmatrix}.$$

Если спиновое двухчастичное состояние в базисе (4) описывается матрицей плотности:

$$\rho = ||\rho_{ij}|| \ , \quad i,j = 1,2,3,4, \tag{6}$$

то значение спиновой корреляции можно представить в виде:

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = Sp(\hat{a} \otimes \hat{b}\rho) = (\, a_x\ a_y\ a_z\,)P \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (\mathbf{a}\ ,\ P\mathbf{b})\ , \tag{7}$$

где P – 3×3 матрица:

$$P \ = \ ||P_{ij}|| \ = \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} (\rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} + \rho_{41}) & i(\rho_{14} - \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41}) & (\rho_{13} + \rho_{31} - \rho_{24} - \rho_{42}) \\ i(\rho_{14} + \rho_{23} - \rho_{32} - \rho_{41}) & (-\rho_{14} + \rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{41}) & i(\rho_{13} - \rho_{31} - \rho_{24} + \rho_{42}) \\ (\rho_{12} + \rho_{21} - \rho_{34} - \rho_{43}) & i(\rho_{12} - \rho_{21} - \rho_{34} + \rho_{43}) & (\rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33} + \rho_{44}) \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении многочастичных состояний часто оказывается полезным разделить их на три класса: факторизуемые, разделяемые и перепутанные. К факторизуемым относятся те состояния, матрица плотности которых ρ_f представима в виде тензорного произведения матриц плотности ее подсистем

$$\rho_f = \rho^{\alpha} \otimes \rho^{\beta}\ . \tag{9}$$

Состояния $\rho_{\Sigma f}$, матрица плотности которых представима в виде суммы факторизуемых матриц плотности, называются разделяемыми:

$$\rho_{\Sigma f} \ = \ \sum_{i}^{n} \rho_i^{\alpha} \otimes \rho_i^{\beta}\ . \tag{10}$$

К перепутанным состояниям относятся те, матрицы плотности ρ_e которых не представимы ни в виде (9), ни в виде (10). В случае двухчастичных систем ρ^{α} – это матрица плотности одной из частиц, а ρ^{β} – матрица плотности другой. При этом как состояния $\rho_f, \rho^{\alpha}, \rho^{\beta}$, так и состояния ρ_e могут быть как чистыми, так и смешанными. Для факторизуемых состояний формула (7) величины спиновой корреляции может быть упрощена. Пусть

$$\rho_f = \rho^{\alpha} \otimes \rho^{\beta} \ = \ \begin{pmatrix} \rho_{11}^{\alpha} & \rho_{12}^{\alpha} \\ \rho_{21}^{\alpha} & \rho_{22}^{\alpha} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \rho_{11}^{\beta} & \rho_{12}^{\beta} \\ \rho_{21}^{\beta} & \rho_{22}^{\beta} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Тогда матрицу (8) можно представить в виде произведения двух матриц

$$P = (P^\alpha)^T \cdot P^\beta = \qquad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} (\rho^\alpha_{12}+\rho^\alpha_{21}) & 0 & 0 \\ i(\rho^\alpha_{12}-\rho^\alpha_{21}) & 0 & 0 \\ (\rho^\alpha_{11}-\rho^\alpha_{22}) & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\rho^\beta_{12}+\rho^\beta_{21}) & i(\rho^\beta_{12}-\rho^\beta_{21}) & (\rho^\beta_{11}-\rho^\beta_{22}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для таких матриц ρ_f среднее (7) принимает вид

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathrm{Sp}(\hat{a}\otimes\hat{b}\rho) = (P^\alpha\mathbf{a}, P^\beta\mathbf{b}) = (\mathbf{r}^\alpha,\mathbf{a})(\mathbf{r}^\beta,\mathbf{b}), \qquad (13)$$

где

$$\mathbf{r}^\alpha = ((\rho^\alpha_{12}+\rho^\alpha_{21}),\ i(\rho^\alpha_{12}-\rho^\alpha_{21}),\ (\rho^\alpha_{11}-\rho^\alpha_{22})).$$

Из формулы (8) следует, что состоянию (10) соответствует матрица

$$P_{\Sigma f} = \sum_i^n P_i = \sum_i^n (P_i^\alpha)^T \cdot P_i^\beta, \qquad (14)$$

где $(P_i^\alpha)^T$, P_i^β – матрицы вида (12).

Пусть имеется источник, испускающий пары частиц, образующих некоторое двухчастичное состояние и четыре произвольно выбранных направления $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$. Неравенство Белла для двухчастичных спиновых состояний имеет вид

$$|\,E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{c}) + E(\mathbf{d},\mathbf{b}) - E(\mathbf{d},\mathbf{c})| \le 2. \qquad (15)$$

Легко видеть, что для состояний $\rho_{\Sigma f}$ неравенство Белла выполняется.

Справедливо **Утверждение 1.** Если матрица P представима в виде суммы (14) с n слагаемыми, то она не может быть представлена в виде аналогичной суммы с другим числом слагаемых.

Это утверждение следует из того, что имеется только три линейно независимых матрицы вида (12).

Таким образом, мы получили, что все матрицы P делятся на четыре непересекающихся класса: на те, которые вообще не представимы в виде суммы (14), и те, которые представимы в виде таких сумм, содержащих одно, два и три слагаемых.

Изучим теперь связь между матрицами ρ и P. Выясним, какие матрицы ρ соответствуют одной и той же матрице P.

Имеет место **Утверждение 2.** Каждой матрице P соответствует 6-параметрическое семейство матриц ρ. Их элементы имеют вид

$$\rho_{14} = 1/4[P_{11}-P_{22}-i(P_{12}+P_{21})]\,,\ \rho_{23} = 1/4[P_{11}+P_{22}+i(P_{12}-P_{21})]\,, \qquad (16)$$

$$\rho_{11} = 1/4(1 + P_{33} + A_1 + A_2)\,,\ \rho_{22} = 1/4(1 - P_{33} - A_1 + A_2)\,, \qquad (17)$$

$$\rho_{33} = 1/4(1 - P_{33} + A_1 - A_2)\,,\ \rho_{44} = 1/4(1 + P_{33} - A_1 - A_2)\,,$$

$$\rho_{13} = 1/4[(P_{13}-iP_{23})+(A_{13}+iB_{13})],\ \rho_{24} = 1/4[-(P_{13}-iP_{23})+(A_{13}+iB_{13})], \qquad (18)$$

$$\rho_{12} = 1/4[(P_{31}-iP_{32})+(A_{12}+iB_{12})],\ \rho_{34} = 1/4[-(P_{31}-iP_{32})+(A_{12}+iB_{12})]. \qquad (19)$$

Здесь

$$A_1,\ A_2,\ A_{12},\ B_{12},\ A_{13},\ B_{13} \tag{20}$$

– произвольные вещественные параметры.

Этот результат согласуется с тем фактом, что матрица P описывается девятью параметрами, а матрица ρ – пятнадцатью. Области изменения параметров (20) определяются условиями на элементы матрицы плотности (6):

$$\rho_{ii} \le 1,\ \ \rho_{ii}\rho_{jj} \le \rho_{ij}\rho_{ji}. \tag{21}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о структуре матриц P и ρ. Пусть теперь матрица ρ факторизуема, то есть представима в виде (9). Ей соответствует факторизуемая матрица P, имеющая вид (12). Согласно **Утверждению 2**, имеется 6-параметрическое семейство матриц ρ, также соответствующих этой P; выясним, какие ограничения следует наложить на параметры (20), чтобы из этого семейства выделить факторизуемые матрицы.

Утверждение 3. Каждой матрице P, представимой в виде (12), соответствует 1-параметрическое семейство факторизуемых матриц ρ. Их элементы определяются соотношениями (16) – (19), на параметры (20) которых наложены еще дополнительные условия:

$$A_1A_2 = P_{33}\ ,\ \ P_{13}B_{13} = -P_{23}A_{13}\ ,\ \ P_{31}B_{12} = -P_{32}A_{12}\ . \tag{22}$$

$$A_1(A_{13}+iB_{13}) = P_{13} - iP_{23}, \quad A_2(A_{12}+iB_{12}) = P_{31} - iP_{32}.$$

Мы получили, что для того, чтобы матрица ρ, восстановленная по матрице P, была факторизуемой, параметры (20) должны удовлетворять соотношениям (22). Если же эти условия не выполняются, матрица ρ не представима в виде (9). Она также не представима и в виде суммы (10), поскольку, согласно **Утверждению 1**, в этом случае ее матрицу P нельзя было бы записать в форме (12). Тем не менее, для состояний с такой матрицей плотности неравенство Белла выполняется.

Итак, мы нашли 6-параметрическое семейство состояний, матрицы плотности которых не факторизуются и не являются разделяемыми, но для которых неравенство Белла выполняется. В более общем случае к ним следует добавить состояния, матрица P которых представима в виде суммы (14) с двумя и тремя слагаемыми.

Состояния, которые обладают факторизуемыми P-матрицами (12), мы будем называть P-факторизуемыми, аналогично, P-разделяемые состояния обладают P-матрицами (14), а P-матрицы P-перепутанных состояний нельзя представить в виде (14).

Используя технику P-матрицы, можно уточнить неравенства Белла, выражая их правые части через характеристики P-матриц соответствующего состояния. Прежде всего отметим, что неравенство Белла (15) выполняется для чистых факторизуемых состояний, причем существуют наборы векторов, для которых это неравенство переходит в равенство. Действительно, для факторизуемых состояний выполняется соотношение (13). Легко видеть, что если состояние ρ^α – чистое, то длина вектора $\mathbf{r}^\alpha$ равна единице:

$$|\mathbf{r}^\alpha| = 1. \tag{23}$$

Если же это состояние – смешанное, то $|\mathbf{r}^\alpha| < 1$. Поэтому для факторизуемых состояний (9) с учетом (13) можно получить неравенство

$$|\,E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{c}) + E(\mathbf{d},\mathbf{b}) - E(\mathbf{d},\mathbf{c})| \le 2|\mathbf{r}^\alpha||\mathbf{r}^\beta|\,. \tag{24}$$

Из формулы (13) также видно, что в случае чистых состояний неравенство Белла может при специальном выборе векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ перейти в равенство, если же состояния смешанные, то выполняется более сильное неравенство (24), нежели исходное неравенство (15). Такие неравенства мы будем называть обобщенными неравенствами Белла. Правая часть в таком неравенстве может быть сколь угодно мала.

До сих пор мы рассматривали двухчастичные P-факторизуемые состояния. Для этих состояний выполняется неравенство (24). Если же мы имеем P-разделяемое состояние, то для каждого его слагаемого выполняется неравенство (24), умноженное на соответствующий коэффициент. Для всего же состояния может выполняться более сильное неравенство, чем сумма отдельных неравенств.

Рассмотрим теперь P-перепутанное смешанное состояние Ψ_E, которое образовано состояниями Ψ_1, Ψ_2, входящими в него с вероятностями w_1, w_2:

$$\Psi_1 = \alpha\Psi_{++} + \beta\Psi_{--}\,, \quad \Psi_2 = \gamma\Psi_{+-} + \delta\Psi_{+-}\,,$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,, \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1\,, \quad w_1 + w_2 = 1. \tag{25}$$

Такому состоянию отвечает P-матрица

$$P_E = \tag{26}$$
$$= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^* + \gamma^*\delta)w_2 + (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)w_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma\delta^* + \gamma^*\delta)w_2 - (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)w_1 & 0 \\ 0 & 0 & w_1 - w_2 \end{pmatrix}.$$

Подбирая величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ так, чтобы выполнялось условие

$$(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)w_1 = 0\,, \quad (\gamma\delta^* + \gamma^*\delta)w_2 = (w_1 - w_2), \tag{27}$$

получим, что для состояния (26) выполняется обобщенное неравенство Белла

$$|\,E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{c}) + E(\mathbf{d},\mathbf{b}) - E(\mathbf{d},\mathbf{c})| \le 2\sqrt{2}|w_1 - w_2|\,. \tag{28}$$

Отсюда видно, что в зависимости от того, с какими вероятностями входят чистые состояния в смешанное, правая часть неравенства (28) может быть и сколь угодно малой и достаточно большой для того, чтобы нарушить стандартное неравенство Белла (15).

В общем случае обобщенное неравенство Белла имеет вид

$$|\,E(\mathbf{a},\mathbf{b}) + E(\mathbf{a},\mathbf{c}) + E(\mathbf{d},\mathbf{b}) - E(\mathbf{d},\mathbf{c})| \le \sqrt{2}\sup_{\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2}(\|P(n_1)\| + \|P(n_2)\|). \tag{29}$$

Здесь sup берется по всем парам векторов n_1, n_2 таким, что

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0\,, \quad \|n_1\| = \|n_2\| = 1.$$

Непосредственно из определения (7) оператора P следует, что $\|P\| \le 1$, поэтому максимальное значение правой части неравенства (29) равняется $2\sqrt{2}$. Из формулы (28) видно, что это значение достигается на чистых перепутанных состояниях.

Проведенный анализ показывает, что из того факта, что для некоторого состояния выполняется неравенство Белла (15), невозможно сделать никакого заключения о природе этого состояния. Оно может быть как перепутанным, так и факторизуемым. Если же неравенство (15) нарушается, то соответствующее состояние с необходимостью является перепутанным.

Другой вывод состоит в том, что для каждого состояния можно написать более точное обобщенное неравенство, правая часть которого определяется нормой P-матрицы этого состояния. Для чистых факторизуемых состояний эта норма равна единице и им соответствует обычное неравенство (15), для разложимых и смешанных факторизуемых состояний норма P-матрицы строго меньше единицы и для них можно написать обобщенное неравенство Белла (24). Для перепутанных состояний имеют место обобщенные неравенства (29).

---

1. A.Einstein, B.Podolsky, and N.Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935). [Перевод: УФН **16**, 440 (1936).]
2. N.Bohr, Phys. Rev. **48**, 696 (1935). [Перевод: УФН **16**, 446 (1936).]
3. J.S.Bell, Physics **1**, 195 (1964).
4. A.Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Springer-Verlag, 1986. [А. Боум, *Квантовая механика*, М.: Мир, 1990.]
5. R.F.Werner, Phys. Rev. **A40**, 4277 (1989).
6. S.Popescu, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994); **74**, 2619 (1995).
7. M.Horodecki, P.Horodecki, and R.Horodecki, Phys. Lett. **A210**, 377 (1996); **223**, 1 (1996).
8. M.Horodecki, P.Horodecki, and R.Horodecki, Phys. Rev. Lett. **78**, 574 (1997); **80**, 5239 (1998).
9. A.Peres, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
10. M.Levenstein and A. Sanpera, Phys. Rev. Lett. **80**, 2261 (1998).
11. R.Horodecki, M.Horodecki, and P.Horodecki, Phys. Rev. **A59**, 1799 (1999).
12. R.Garisto and L.Hardy, Phys. Rev. **A60**, 827 (1999).
13. T.F.Jordan, Phys. Rev. A, **60**, 2726 (1999).
14. D.V.Strekalov, Y.-H.Kim, and Y.Shin, Phys. Rev. **A60**, 2685 (1999).
15. V.V.Dodonov and V.I.Man'ko, Phys. Lett. **A229**, 335 (1997).
16. О.В.Манько, В.И.Манько, ЖЭТФ **112**, 796 (1997).
17. В.А.Андреев, В.И.Манько, ЖЭТФ **114**, 437 (1998).
18. V.A.Andreev and V.I.Man'ko, J. Opt. B: Quant. Sem. Opt. **2**, 122 (2000).