Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.3, стр.201 - 204

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВЫСШИХ СПИНОВЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ В ДВУМЕРНОМ КЛАССИЧЕСКОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

И.В.Колоколов[1)]

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера Сибирского отделения РАН 630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 29 июня 2000 г.

После переработки 11 июля 2000 г.

Для двумерного классического ферромагнетика вычисляются разноточечные спиновые корреляционные функции в пертурбативной области расстояний r: $a < r \ll \ll m^{-1}$, где a – шаг решетки и m^{-1} – корреляционная длина. Приводятся выражения для корреляторов четвертого и более высоких порядков.

PACS: 75.10.-b, 75.70.Ak

Длинноволновые статические статистические свойства двумерного классического ферромагнетика Гайзенберга определяются мерой Гиббса:

$$\prod_{\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{n}(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{n}^2(\mathbf{x})-1\right)\exp\left(-\frac{1}{2g_0}\int d^2\mathbf{x}\,(\partial_\mu \mathbf{n})^2)\right). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{n}$ – трехкомпонентный вектор и константа связи g_0 пропорциональна температуре. На малых расстояниях предполагается наличие решетки с шагом a. Мы рассматриваем случай $g_0 \ll 1$.

Под именем двумерной нелинейной $O(3)-\sigma$-модели выражение (1) исследовалось достаточно давно (см. ссылки в [1]), но реальным продвижением была работа Полякова [2], показавшего перенормируемость теории (1) и рост эффективного взаимодействия флуктуаций $\mathbf{n}$-поля с расстоянием. Этот результат был обобщен в статье [3] на равновесную динамику двумерных ферромагнетиков. Имеется точное утверждение (теорема Мермина–Вагнера) об отсутствии спонтанного нарушения симметрии относительно глобальных вращений спинов $\mathbf{n}$ в (1). Отсюда следует, что парная спин–спиновая корреляционная функция должна убывать с расстоянием. Эффективное взаимодействие перестает быть малым, начиная с масштаба $r \geq m^{-1} \simeq a\exp(2\pi/g_0)$. Гипотеза о том, что m^{-1} является корреляционной длиной в системе (см.[4]), была позже подтверждена точными результатами [5–8]. В области небольших расстояний $a \leq r \ll m^{-1}$ спиновые корреляционные функции могут быть определены с помощью суммирования ведущих логарифмов в теории возмущений. При этом $g_0\ln(r/a)$ уже может быть ~ 1 и спиновые корреляторы могут изменяться сколь угодно сильно – от одноузельных значений порядка 1 до асимптотически малых (пропорциональных положительным степеням g_0). Для двух спинов результат давно известен [4, 9] и подтвержден как точными расчетами, так и численным моделированием [10].

В настоящей работе в рамках ведущего логарифмического приближения вычисляются аномальные размерности произвольных тензорных операторов, построенных

1) e-mail: kolokolov@inp.nsk.su

из произведений компонент вектора $\mathbf{n}$. Результат оказывается очень простой: тензор $T^{(l)}$, относящийся к неприводимому представлению группы $O(3)$ с моментом l, при переходе с масштаба a на масштаб $a\exp(2\pi s/g_0)$ преобразуется как:

$$T^{(l)} \longrightarrow \left(\frac{g_0}{g(s)}\right)^{l(l+1)/2} T^{(l)}. \tag{2}$$

Здесь $g(s) = g_0(1-s)^{-1}$ – значение бегущей константы связи на масштабе $a\exp(2\pi s/g_0)$. Это утверждение просто доказывается и в подходе А.М.Полякова [2], однако в данной работе мы используем другой формализм, более удобный для пертурбативных вычислений.

Начнем с точного утверждения: для одного спина $\mathbf{n}$ усреднение по мере $d\mathbf{n}\delta(\mathbf{n}^2 - 1)$ эквивалентно усреднению по мере $d\psi^+ d\psi^-$, определенной на диске $\psi^+\psi^- \le 4$ в комплексной плоскости переменной $\psi^+ = (\psi^-)^*$. При этом усреднении компоненты n_z и $n^\pm \equiv n_x \pm i n_y$ выражаются через $\psi^\pm$ следующим образом:

$$n^+ = \psi^+, \quad n^- = \psi^- - \frac{1}{4}\left(\psi^-\right)^2\psi^+, \quad n_z = 1 - \frac{1}{2}\psi^+\psi^-. \tag{3}$$

Для доказательства этой теоремы достаточно вычислить производящую функцию $\mathcal{Z}(\mathbf{h}) = \langle\exp(\mathbf{hn})\rangle$ двумя способами и убедиться в совпадении результатов. Представление (3) может рассматриваться как формальный классический предел представления Дайсона–Малеева [11, 12] для квантового спина. Однако следует подчеркнуть, что (3) не есть параметризация точек сферы в прямом смысле: знак равенства в (3) означает только совпадение соответствующих средних. Можно также сказать, что (3) является заменой переменных с последующей деформацией поверхности интегрирования (см. аналогичную конструкцию для квантовых спинов и ее применение в работах [13–15]).

Выполняя переход от компонент $\mathbf{n}$ к переменным $\psi^\pm$ для каждого спина на узле решетки, мы получим, что статистика спиновых флуктуаций в двумерном классическом ферромагнетике определяется мерой:

$$\prod_{\mathbf{x}} \mathcal{D}\psi^\pm(\mathbf{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2g_0}\int d^2\mathbf{x}\left[\partial_\mu\psi^+\partial_\mu\psi^- + \frac{1}{4}\left(\psi^+\right)^2\left(\partial_\mu\psi^-\right)^2\right]\right\}, \tag{4}$$

с ограничением $\psi^+\psi^- \le 4$ в каждой точке пространства. Заметим, что оно (в отличие, скажем, от связи $\mathbf{n}^2 = 1$) непосредственно себя в теории возмущений не проявляет.

Несимметричность по ψ^+- и ψ^--нелинейности в (4) обеспечивает перенормируемость действия и безмассовость флуктуаций в теории возмущений. После интегрирования в однопетлевом приближении по фурье-компонентам поля $\psi^\pm$ с волновыми векторами от a^{-1} до $a^{-1}\exp(-2\pi s/g_0)$ эффективная мера принимает вид

$$\prod_{\mathbf{x}} \mathcal{D}\psi^\pm(\mathbf{x}) \exp\left\{-\frac{1}{2g_0}\int d^2\mathbf{x}\left[\partial_\mu\psi^+\partial_\mu\psi^- + \frac{g(s)}{4g_0}\left(\psi^+\right)^2\left(\partial_\mu\psi^-\right)^2\right]\right\}, \tag{5}$$

где $g(s) = g_0(1-s)^{-1}$. Переопределением полей $\psi^\pm \to \left(g_0/g(s)\right)^{1/2}\psi^\pm$ лагранжиан в (5) приводится к исходному виду с заменой $g_0 \to g(s)$.

Ограничение $\psi^+\psi^- \leq 4$ содержит в себе инфракрасную регуляризацию теории, так как исключает бесконечно большие вклады в средние от крупномасштабных флуктуаций. Однако последовательное проведение такого анализа существенно непертурбативно и выходит за рамки данной работы. Здесь мы будем просто считать величину m^{-1} (или $s = 1$) инфракрасным обрезанием в теории (4). Иначе говоря, мы заимствуем из точного решения [7, 5] картину о том, что для флуктуаций с длинами волн $\geq m^{-1}$ ограничение $\psi^+\psi^- \leq 4$ "перерабатывается" в массу m и логарифмических вкладов таких масштабов в локальные средние нет. Зависимость от m корреляционных функций на расстояниях $r \ll m^{-1}$ логарифмическая, причем вклады флуктуаций с $s \to 1$ не содержат никаких сингулярностей и их интегральный эффект при $g_0 \to 0$ пренебрежим (см. ниже формулу (7)). Все это позволяет считать теорию возмущений по нелинейности в (4) локальной, и сильное взаимодействие на масштабе конфайнмента $\geq m^{-1}$ не препятствует вычислениям на промежуточных расстояниях с указанной выше точностью.

Значение $m = a^{-1}\exp(-2\pi/g_0)$ как самого малого импульса в петлевых интегрированиях соответствует восстановлению $O(3)$-симметрии в главном логарифмическом приближении: $\langle n_z \rangle = 1 - \langle \psi^+\psi^- \rangle/2 = 0$. Это соотношение обеспечивает инвариантность средних относительно инфинитезимального поворота оси z:

$$\delta\psi^+ = \alpha(1 - \frac{1}{2}\psi^+\psi^-), \quad \delta\psi^- = \frac{\alpha}{4}\left(\psi^-\right)^2, \quad \alpha \to 0, \tag{6}$$

и в инфракрасно регуляризованной теории. Отсюда следуют равенства $\langle (\psi^+\psi^-)^m \rangle = 4^m(m+1)^{-1}$, эквивалентные моментам изотропно распределенного вектора $\langle n_z^{2m} \rangle = (2m+1)^{-1}$.

Для вычисления разноточечных спиновых корреляторов основным свойством теории (4) является ковариантность оператора $(\psi^+)^m$ относительно ренормгруппового преобразования: при усреднении по флуктуациям в импульсном слое $a^{-1}\exp(-2\pi s/g_0) < k < a^{-1}$ оператор $(\psi^+)^l$ преобразуется как

$$(\psi^+)^l \longrightarrow \left(\frac{g_0}{g(s)}\right)^{l(l+1)/2} (\psi^+)^l. \tag{7}$$

Показатель $l(l+1)/2$ равен числу способов спаривания $(\psi^+)^l$ с вершиной $(\psi^+)^2(\partial_\mu\psi^-)^2$ плюс $l/2$ из-за перемасштабирования полей $\psi^\pm$. С точки зрения группы $O(3)$, действующей на $\mathbf{n}$, оператор $(\psi^+)^l$ является вектором старшего веса в неприводимом представлении с моментом l. Инвариантность относительно преобразования (6) обеспечивает единство трансформационных свойств относительно ренормгрупповых преобразований внутри всего неприводимого представления. Отсюда и следует соотношение (2).

Разложением произведений компонент $\mathbf{n}$ на неприводимые относительно группы вращений тензоры можно найти спиновые корреляторы произвольного порядка. Зависимость от расстояний при этом определяется с помощью обычной процедуры суммирования паркетных диаграмм [16, 17]. Приведем явные выражения для четырехточечного коррелятора $K_4 = \langle n_z(\mathbf{r}_1)n_z(\mathbf{r}_2)n_z(\mathbf{r}_3)n_z(\mathbf{r}_4)\rangle$; с нашей точностью существенны только следующие асимптотические геометрии ($r_{jl} \equiv |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|$, $K_4 \equiv (g_0/2\pi)^4 \mathcal{K}_4$):

$$r_{12}, r_{34} \ll r_{13} \simeq r_{24} \simeq R,$$

$$K_4 = \frac{4}{45}\frac{\ln^6(mR)}{\ln(mr_{12})\ln(mr_{34})} + \frac{1}{9}\ln^2(mr_{12})\ln^2(mr_{34}), \tag{8}$$

$r_{12} \ll r_{13} \ll r_{34}$,

$$K_4 = \frac{4}{45}\frac{\ln^2(mr_{34})\ln^3(mr_{13})}{\ln(mr_{12})} + \frac{1}{9}\ln^2(mr_{12})\ln^2(mr_{34}), \tag{9}$$

$$r_{12} \simeq r_{13} \simeq r_{34} \simeq R, \quad K_4 = \frac{1}{5}\ln^4(mR). \tag{10}$$

В заключение заметим, что для N-компонентного поля $\mathbf{n}$ в законе преобразования (2) вместо $l(l+1)$ будут стоять собственные числа оператора Казимира группы $O(N)$ (угловой части лапласиана в N-мерном пространстве), деленные на $N-2$.

Я глубоко благодарен В.В.Лебедеву за многочисленные обсуждения и конструктивную критику. Я признателен А.И.Вайнштейну, А.Гамба, В.А.Казакову, Е.В.Подивилову, И.Б.Хрипловичу и В.Л.Черняку за замечания и советы и М.В.Черткову за интерес к работе. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант #00-02-17652).

---

1. J.Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
2. A.M.Polyakov, Phys. Lett. **B59**, 79 (1975).
3. В.В.Лебедев, ЖЭТФ **87**, 1481 (1984).
4. А.М.Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л.Д.Ландау, 1995.
5. Ал.Б. Замолодчиков, А.Б.Замолодчиков, Письма в ЖЭТФ **26**, 608 (1977).
6. A.M.Polyakov and P.B.Wiegmann, Phys. Lett. **B131**, 121 (1983).
7. П.Б.Вигман, Письма в ЖЭТФ **41**, 79 (1985).
8. V.A.Fateev, V.A.Kazakov, and P.B.Wiegmann, Nucl. Phys. **B424**, 505 (1994).
9. А.З.Паташинский, В.Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, М.: Наука, 1982.
10. J.Balog and M.Niedermaier, Nucl. Phys. **B500**, 421 (1997).
11. F.Dyson, Phys.Rev. **102**, 1217 (1956).
12. С.В.Малеев, ЖЭТФ **33**, 1010 (1957).
13. I.V.Kolokolov. Phys. Lett. **114A**, 99 (1986).
14. И.В.Колоколов, Е.В.Подивилов, ЖЭТФ **95**, 211 (1989).
15. M.Chertkov and I.Kolokolov, ЖЭТФ **106**, 1525 (1994).
16. В.В.Судаков, ЖЭТФ **30**, 87 (1956).
17. А.И.Ларкин, Д.Е.Хмельницкий, ЖЭТФ **56**, 2087 (1969).