Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.3, стр.223 - 228

БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ АКУСТИЧЕСКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В.С.Новиков[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 5 июля 2000 г.

Рассмотрена классическая акустическая спектральная задача. Построен класс безотражательных потенциалов такой спектральной задачи.

PACS: 02.30.-f, 41.20.Jb, 42.25.Bs

Эта работа посвящена изучению классической акустической спектральной задачи на прямой

$$\psi_{xx} = \lambda \varepsilon(x) \psi. \tag{1}$$

Такое уравнение имеет многочисленные физические приложения, так как описывает распространение волн в неоднородных средах. Например, оно соответствует задаче распространения электромагнитных волн в неоднородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$:

$$\psi = E_z(x), \quad E_x = E_y = 0, \quad \lambda = -\omega^2/c^2.$$

Исследованию уравнения (1) посвящено большое число работ (см., например, [1, 2]), где рассматривается различный характер поведения $\varepsilon(x)$. Целью этой работы является построение класса потенциалов $\varepsilon(x)$, обладающих следующим важным свойством: квазиклассические решения уравнения (1)

$$\psi(x,p) = \exp(ipf(x) + g(x)) \prod_{j=1}^{n} (ip - \xi_j(x)), \quad \lambda = -p^2 \tag{2}$$

являются точными решениями. Мы будем называть такие потенциалы баргмановскими [3] (B-потенциалы). B-потенциалы могут иметь особенности вида

$$\varepsilon(x) \sim 1/(x - x_j)^{2\alpha} \tag{3}$$

в конечном числе точек $x_j, \quad j = 1, ..., n$, причем

$$\alpha = 2l/(2l+1), \quad l \in \mathcal{N}. \tag{4}$$

Простейшим примером B-потенциала является $\varepsilon(x) = c/(x - x_0)^4$, $c = \text{const}$, $x_0 = \text{const}$ [1], который соответствует равенству полинома по p в квазиклассической формуле (2) единице. Из такого класса потенциалов можно выделить подкласс безотражательных потенциалов задачи (1), удовлетворяющих условию

$$\varepsilon(x) \to 1, \quad |x| \to \infty. \tag{5}$$

---

1) e-mail: nvs@itp.ac.ru

В этом случае можно рассмотреть задачу рассеяния:

$$\psi(x,\lambda) \sim e^{-ipx} + R(p)e^{ipx}, \quad x \to \infty, \tag{6}$$

$$\psi(x,\lambda) \sim T(p)e^{-ipx}, \quad x \to -\infty. \tag{7}$$

Такие прямая и обратная задачи рассеяния могут быть полностью проанализированы, так как сводятся к классической задаче рассеяния для уравнения Шредингера с потенциалом, быстро убывающим на бесконечности [4, 5], но имеющим конечное число особенностей вида $l(l+1)/(y-y_j)^2$ [6]. Нас будет интересовать лишь случай баргмановских и безотражательных потенциалов, которым по определению соответствует $R(p) \equiv 0$.

Для построения такого класса B-потенциалов мы используем метод одевания [7]. Такая процедура обеспечивает, кроме того, возможность построения в этом случае точного решения уравнения (1).

Безотражательные потенциалы акустической спектральной задачи. В этом разделе мы опишем класс B-потенциалов задачи (1) и построим безотражательные потенциалы. Уравнение (1) нам будет удобно переписать в виде

$$\psi_{xx} = \frac{\lambda}{u^2(x)}\psi. \tag{8}$$

Условия (5), (3) означают, что

$$u(x) \to 1, |x| \to \infty, \quad u(x) \sim (x - x_j)^{\alpha}.$$

Уравнение (8) удобно преобразовать к уравнению

$$\psi_{yy} = \mathcal{U}\psi_y + \lambda\psi \tag{9}$$

заменой [5]

$$u(x) = v_y(y), \quad x = v(y), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{U} = v_{yy}/v_y$$

В силу (5), (3) имеем

$$v_y(y) \to 1, \quad \mathcal{U} \to 0, \quad |y| \to \infty, \tag{11}$$

$$v_y \sim (y - y_j)^{\alpha/(1-\alpha)}, \quad \mathcal{U} \sim \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{1}{y - y_j}, \tag{12}$$

где y_j есть решение уравнения $x_j = v(y_j)$.

Пусть $\varepsilon(x)$ есть B-потенциал задачи (1). Это означает, что уравнение (8) допускает решения вида (2). Следовательно, уравнение (9) также имеет решения вида

$$\psi(y,p) = \exp(ipf(y) + g(y))P(p,y), \tag{13}$$

$$P(p,y) = \prod_{j=1}^{n}(ip - \xi_j(y)).$$

Описав класс B-потенциалов задачи (9), мы опишем в силу преобразования (10) B-потенциалы задачи (1).

Подставив (13) в (9), получаем

$$(ipf'' + g'')P + (ipf' + g')^2 P + 2(ipf' + g')P' + P'' = \mathcal{U}(ipf' + g')P + \mathcal{U}P' - p^2 P. \quad (14)$$

Уравнение (14) должно удовлетворяться при любом p, следовательно, представляет собой систему $n+2$-х уравнений на функции $f, g, \xi_j, \mathcal{U}$. Функции f и g легко могут быть исключены из (14). Действительно, при $(ip)^{n+2}$ имеем

$$f'^2 = 1 \Longrightarrow f = \pm y.$$

Положим $f = y$. Тогда из (14) сразу же следует, что

$$\mathcal{U} = 2g'$$

(коэффициент при $(ip)^{n+1}$). Окончательно, уравнение (14) принимает вид

$$P'' + 2ipP' = FP, \quad (15)$$

$$F = \frac{1}{4}\mathcal{U}^2 - \frac{1}{2}\mathcal{U}'.$$

Из (15) следует замкнутая система уравнений на функции $\xi_j(y)$:

$$\xi_j'' = 2\xi_j\xi_j' + \sum_{k\neq j} \frac{\xi_j'\xi_k'}{\xi_j - \xi_k}, \quad j = 1, ..., n. \quad (16)$$

Аналогично, случай $f = -y$ дает

$$P'' - 2ipP' = FP,$$

$$\xi_j'' = -2\xi_j\xi_j' + \sum_{k\neq j} \frac{\xi_j'\xi_k'}{\xi_j - \xi_k}, \quad j = 1, ..., n,$$

что, очевидно, соответствует замене $\xi_j \to -\xi_j$ в (15) и $\psi \to \overline{\psi}$ в (9), (13).

Итак, для построения всех B-потенциалов задач (9) и (1) достаточно решить систему уравнений (15), что и будет далее проделано.

Определим сначала возможные степени особенностей $\varepsilon(x)$, соответствующие B-классу. Пусть $\varepsilon(x)$ суть B-потенциал задачи (1), имеющий особенности вида (3). В силу (12) необходимо определить вычет $\mathcal{U}$ в точке y_j $\mathcal{U} \sim c/(y - y_j)$, $c = \alpha/(1-\alpha)$. В окрестности y_j функция $F(y)$ представима в виде

$$F = (\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c)\frac{1}{(y - y_j)^2} + F_0 + F_1(y - y_j) + ...$$

Из (15) следует, что ξ_j представимы в окрестности y_j в виде

$$\xi_j = \frac{\xi_j^{-1}}{(y - y_j)} + \xi_j^0 + \xi_j^1(y - y_j) + ...,$$

где часть вычетов ξ_j^{-1} может равняться нулю. Подставив в (15) $p = 0$, разложив ξ_j в окрестности y_j и взяв главную часть, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{-1} \prod_{k\neq j} \xi_k^{-1} + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{-1} \sum_{i\neq j} \xi_i^{-1} \prod_{k\neq i} \xi_k^{-1} = (\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c) \prod_{j=1}^{n} \xi_j^{-1}.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c = l(l+1), \quad l \le n,$$

$$\alpha = 2l/(2l+1), \tag{17}$$

что и требовалось доказать. В силу (13), для $\psi(y,p)$ имеем

$$\psi(y,p) = e^{ipy}\sqrt{v_y}\prod_{j=1}^{n}(ip-\xi_j),$$

которая, как легко видеть, является ограниченной функцией в окрестности особенности. Отсюда следует ограниченность $\psi(x,p)$ в окрестности особенности.

Перейдем теперь к собственно системе (15). Решение (15) может быть построено явно [7, 8, 3]. А именно, пусть

$$\phi_1 = e^{k_1(y-y_{0,1})} \pm e^{-k_1(y-y_{0,1})}, \quad \phi_2 = e^{k_2(y-y_{0,2})} \pm e^{-k_2(y-y_{0,2})}, \ldots,$$

$$\phi_n = e^{k_n(y-y_{0,n})} \pm e^{-k_n(y-y_{0,n})},$$

где k_j, $y_{0,j}$, вообще говоря, комплексные константы. Тогда функция

$$\mathcal{U}_n = 2D\log\frac{<\phi_1,\ldots,\phi_n>}{<\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}>} \tag{18}$$

есть B-потенциал задачи (9), а решение уравнения (9) дается формулой

$$\psi_n = \sqrt{v_{n,y}}(c_1A_ne^{ipy} + c_2A_ne^{-ipy}), \tag{19}$$

$$A_n = \prod_{j=1}^{n}(\frac{1}{2}\mathcal{U}_j - D), \quad D = \frac{d}{dy},$$

$$\mathcal{U}_j = 2D\log\frac{<\phi_1,\ldots,\phi_j>}{<\phi_1,\ldots,\phi_{n-,1}>}$$

$$v_{n,y} = (\frac{<\phi_1,\ldots,\phi_n>}{<\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}>})^2, \tag{20}$$

а c_j – константы. Очевидно, такой B-потенциал параметризуется константами k_j, фазами $y_{0,j}$ и знаком в формулах для ϕ_j. В силу (10) получаем класс B-потенциалов задачи (1):

$$u_n(y) = \mathrm{const}(\frac{<\phi_1,\ldots,\phi_n>}{<\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}>})^2, \tag{21}$$

$$x = \mathrm{const}\int(\frac{<\phi_1,\ldots,\phi_n>}{<\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}>})^2dy.$$

Решение задачи (1) может быть получено из (19) заменой (10).

Рассмотрим теперь подкласс безотражательных потенциалов исследуемой задачи. В этом случае необходимо, чтобы выполнялось условие (5), которое удовлетворяется, если положить $\phi_n = 1$ и $\mathrm{const} = 1/\prod_{j=1}^{n} k_j^2$ в формуле (21). Тогда из (21) следует, что не существует безотражательных потенциалов задачи (1) без особенностей. Степень такой особенности дается формулой (17). Пусть $l = 1$, то есть $\alpha = 2/3$. Положим

$$0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n, \tag{22}$$

$$\phi_1 = \cosh(k_1(y - y_{0,1})), \quad \phi_2 = \sinh(k_2(y - y_{0,2})), \quad \phi_3 = \cosh(k_3(y - y_{0,3})), \ldots, \tag{23}$$
$$\phi_n = \cosh(\sinh)(k_n(y - y_{0,n})), \quad \phi_{n+1} = 1.$$

Тогда легко показать, что формулы (21) – (23) дают все безотражательные потенциалы задачи (1), имеющие n особенностей вида $u(x) \sim (x - x_j)^{2/3}$. При $n = 1$ имеем

$$u_1 = \tanh^2(k_1(y - y_{0,1})), \quad x = y - \frac{1}{k_1}\tanh(k_1(y - y_{0,1})) + x_0.$$

Случаю $n = 2$ соответствует

$$u_2 = \frac{(k_2 \sinh(k_1(y - y_{0,1}))\sinh(k_2(y - y_{0,2})) - k_1 \cosh(k_1(y - y_{0,1}))\cosh(k_2(y - y_{0,2})))^2}{(k_1 \sinh(k_1(y - y_{0,1}))\sinh(k_2(y - y_{0,2})) - k_2 \cosh(k_1(y - y_{0,1}))\cosh(k_2(y - y_{0,2})))^2}.$$

Итак, мы описали безотражательные потенциалы задачи (1) с конечным числом особенностей степени $2\alpha = 4/3$ (см. (3)). Аналогично можно рассмотреть случай высших особенностей $\alpha = 2l/(2l+1)$, $l = 2, 3, \ldots$ Например, случаю $l = 2$, $n = 2$ соответствует

$$u = \frac{(k_2 \sinh(k_1(y - y_{0,1}))\cosh(k_2(y - y_{0,1})) - k_1 \sinh(k_2(y - y_{0,1}))\cosh(k_1(y - y_{0,1})))^2}{(k_1 \sinh(k_1(y - y_{0,1}))\cosh(k_2(y - y_{0,1})) - k_2 \sinh(k_2(y - y_{0,1}))\cosh(k_1(y - y_{0,1})))^2}.$$

В заключение остановимся на спектральном смысле построенных нами B- и безотражательных потенциалов. Можно показать, что построенные нами безотражательные потенциалы (21) – (23) имеют n дискретных собственных значений $\lambda = k_j^2$, определяемых обычным условием [4]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x, \lambda_j)dx < \infty.$$

Коэффициент отражения (6) $R(p) \equiv 0$, а коэффициент прохождения

$$|T(p)|^2 = \left|\prod_{j=1}^{n} \frac{k_j - ip}{k_j + ip}\right|^2 = 1, \quad \mathrm{Im}(p) = 0.$$

На рис.1 изображена функция $u_2(x)$ при $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $y_{0,1} = 0$, $y_{0,2} = 5$. На рис.2 изображена функция $u_3(x)$ при $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $y_{0,1} = 0$, $y_{0,2} = -2$, $y_{0,3} = 5$.

Итак, в этой работе мы описали так называемые B-потенциалы, а также безотражательные потенциалы задачи (1). Было показано, что любой такой безотражательный потенциал имеет особенности вида (3). Одним из возможных способов регуляризации этих особенностей является сдвиг нулей $u(x)$ в комплексную плоскость. Очевидно, это приводит к потере вещественности $\varepsilon(x)$, что соответствует наличию поглощения. Однако общая задача регуляризации выходит за рамки этой работы.

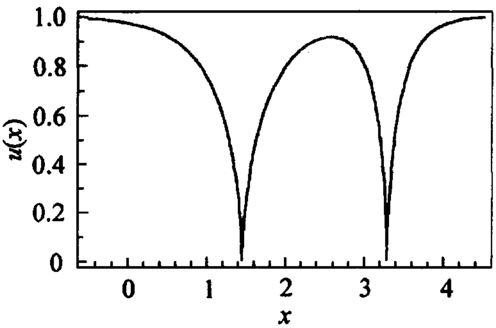

Рис.1

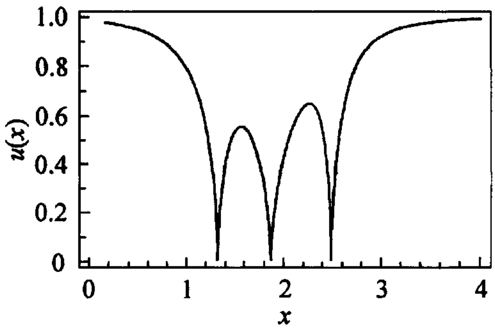

Рис.2

Другим обстоятельством, вышедшим за рамки этой работы, является связь задачи (1) с теорией нелинейных интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных. Задача (1) является спектральной задачей для уравнения Гарри Дима (Harres Dym) [5]:

$$u_t = u^3 u_{xxx} + \beta u_x, \quad \beta = \mathrm{const}.$$

Можно показать, что B-потенциалы задачи (1) являются солитонными решениями уравнения Гарри Дима [9, 10] и его высших аналогов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Б.Шабату, а также В.Г.Марихину, П.Г.Гриневичу, С.В.Буланову за полезное обсуждение данной работы.

---

1. В.Л.Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва, 1967.
2. Л.М.Бреховских, *Волны в слоистых средах*, Издательство АН СССР, Москва, 1957.
3. А.Б.Шабат, Динамика сплошной среды **5**, 130 (1970).
4. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980.
5. Ф.Калоджеро, А.Дегасперис, *Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений*, Мир, Москва, 1985.
6. В.А.Аркадьев, А.К.Погребков, М.К.Поливанов, *Сингулярные решения уравнения KdV и метод обратной задачи*, Записки научного семинара ЛОМИ.
7. А.П.Веселов, А.Б.Шабат, ФАН **27**, 1 (1993).
8. A.B.Shabat, Inverse Problems **8**, 303 (1992).
9. L.A.Dmitrieva, Phys. Lett. **182A**, 65 (1993).
10. L.A.Dmitrieva, J. Phys A: Math. Gen. **26**, 6005 (1993).