РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

Статьями Баранова М.А. "Сверхтекучий фазовый переход в атомарном ферми-газе в ловушке" и Макеенко Ю.М. "Редуцированные модели и некоммутативные калибровочные теории" журнал "Письма в ЖЭТФ" продолжает новую рубрику "Научные итоги". В этой рубрике будут публиковаться небольшие заказные обзоры на базе результатов, полученных в рамках завершенных проектов, поддерживавшихся Российским Фондом Фундаментальных Исследований. Редакция рассчитывает публиковать 10 – 12 таких обзоров в год и надеется, что эта инициатива получит одобрение научной общественности.

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проект РФФИ # 97-02-16532

Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.7, стр.553 - 565

СВЕРХТЕКУЧИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В АТОМАРНОМ ФЕРМИ-ГАЗЕ В ЛОВУШКЕ

М.А.Баранов[1)]

Российский научный центр "Курчатовский Институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 сентября 2000 г.

Исследуется сверхтекучий фазовый переход в атомарном ферми-газе, находящемся в гармонической ловушке. Найдены критическая температура перехода, а также температурная зависимость и пространственная форма параметра порядка. Получен спектр и волновые функции одночастичных и коллективных возбуждений газа в сверхтекучей фазе. Показано, что собственные частоты возбуждений имеют ярко выраженную температурную зависимость, что может быть использовано, в частности, для идентификации сверхтекучей фазы.

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Fk

Успешные эксперименты по достижению бозе-конденсации в атомарных газах щелочных элементов в магнитных ловушках [1 – 3] стимулировали небывалый интерес

---

1) e-mail: baranov@kapitza.ras.ru

к изучению когерентных квантовых явлений в ультрахолодных пространственно-неоднородных газовых системах (см., например, обзор [4]). Это связано с целым рядом обстоятельств, сочетание которых делает эти системы совершенно уникальными объектами как для теоретических, так и для экспериментальных исследований. С одной стороны, по самой своей сути они являются разреженными системами, что приводит к тому, что все эффекты межатомного взаимодействия определяются лишь одним малым параметром – газовым параметром, а потому могут быть вычислены с помощью стандартных методов теории возмущений. Кроме того, использование эффекта Фешбаха позволяет в ряде случаев изменять саму величину межатомного взаимодействия (длину рассеяния) в весьма широком диапазоне, вплоть до смены знака [5]. С другой стороны, наличие сравнительно простых и хорошо развитых оптических методов манипулирования газовыми образцами щелочных элементов (а именно они в подавляющем большинстве случаев используются в эксперименте) в сочетании с хорошо развитыми методиками измерения их физических свойств дает возможность ставить такие эксперименты, о которых в физике конденсированного состояния можно было только мечтать.

Хотя подавляющее большинство экспериментов в настоящее время проводятся с бозе-газами, интерес к изучению ферми-газов (таких, как, например, ^{6}Li, ^{40}K и метастабильный триплетный ^{3}He) в последнее время обозначается все отчетливее. Основная проблема на пути экспериментального исследования атомарных ферми-газов связана с трудностью их охлаждения ниже температуры квантового вырождения: метод испарительного охлаждения, столь удачно зарекомендовавший себя как последняя ступень при достижении температур нанокельвиного диапазона в случае бозе-газов, в случае фермионов оказывается гораздо менее эффективным в силу уменьшения из-за принципа Паули частоты столкновений с понижением температуры. В силу этого приходится идти на всякого рода ухищрения, которые приводят к усложнению эксперимента (подробнее см. [6–8]). Тем не менее, в 1999 г. было сообщено [9] об успешном охлаждении двухкомпонентного ферми-газового образца из $7 \cdot 10^5$ атомов ^{40}K в магнитной ловушке до температуры 300 нК, что составляет примерно половину от температуры квантового вырождения (температуры Ферми) для данного числа атомов в используемой при эксперименте ловушке. В настоящее время подобные эксперименты планируются и осуществляются уже в большинстве лабораторий, занимающихся исследованием физических свойств ультрахолодных газов.

Имеющиеся к настоящему времени теоретические работы можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся работы по исследованию свойств нормального состояния ферми-газового образца и проявления эффектов квантовой статистики (принципа Паули) в его оптических и динамических характеристиках. Здесь следует отметить предсказание эффектов подавления спонтанного излучения [10, 11] и сужения спектральной ширины лазерного излучения, проходящего через газовый образец [12], когда последний переходит в режим квантового вырождения, а также существенного уменьшения столкновительного затухания периодического движения пробной частицы внутри газового облака [13]. Коллективные колебания различной симметрии газового образца, как в гидродинамическом, так и в бесстолкновительном режиме исследовались в работах [14] и [15, 16], соответственно. (Следует отметить, что возможность реализации гидродинамического режима в ^{6}Li связана с существованием достаточно большой длины триплетного s-рассеяния ($a = -1140$ Å [17]) в сравнительно слабых магнитных полях (эффект Фешбаха).)

Но наиболее интересным для рассматриваемых ферми-газовых систем, как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения, является исследование фазового перехода в сверхтекучее состояние. Принципиальная возможность такого перехода существует как для ^{6}Li [18], так и для ^{40}K [19], так как в обоих случаях с помощью эффекта Фешбаха длина рассеяния a может быть сделана отрицательной (что соответствует притяжению) и большой ($\sim 10^3$ Å) по абсолютной величине. (Последнее чрезвычайно существенно для рассматриваемых газовых систем, так как позволяет надеяться на получение экспериментально достижимых значений критической температуры сверхтекучего перехода.) На возможность реализации сверхтекучего спаривания в полностью поляризованном по электронному спину двухкомпонентном атомарном ^{6}Li было указано в работах [18, 20], где рассматривалось "синглетное" s-спаривание между атомами из различных компонент сверхтонкого мультиплета, возникающее вследствие уже упомянутой выше отрицательной длины рассеяния. Оценка величины критической температуры по известным формулам для пространственно-однородного случая дала значение порядка 30 нК при плотности газа $4 \cdot 10^{12}$ см$^{-3}$, что является вполне достижимым с экспериментальной точки зрения. Другой сценарий сверхтекучего перехода в тех же условиях (при наличии только триплетного s-рассеяния) связан с образованием "триплетных" куперовских пар с орбитальным моментом $l = 1$ [21]. Механизм образования куперовских пар в данном случае нечувствителен к знаку взаимодействия, но в результате для достижения реалистичных значений критической температуры необходим газовый образец с существенно большей плотностью. Отметим также работу [22], в которой обсуждалось p-спаривание на основе диполь-дипольного взаимодействия.

В полной аналогии с пространственно-однородным случаем, переход ферми-газа в сверхтекучую фазу существенным образом меняет его свойства, что само по себе может служить индикатором появления новой фазы. Ниже будут подробно проанализированы особенности сверхтекучего фазового перехода в ферми-газе в условиях ограниченной геометрии ловушки, а также свойства газового образца (одночастичные и коллективные возбуждения) в сверхтекучей фазе (см. работы [23–26]). Для простоты будет рассмотрен случай, когда в системе реализуется синглетное спаривание, так как обобщение на случай триплетного спаривания особых проблем не вызывает.

Гамильтониан двухкомпонентного газа фермионных атомов (α- и β-атомы), помещенного в изотропный гармонический удерживающий потенциал, имеет вид ($\hbar = 1$)

$$H = \sum_{i=\alpha,\beta} \int d\mathbf{r} \psi_i^\dagger(\mathbf{r}) H_0 \psi_i(\mathbf{r}) + V \int d\mathbf{r} \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

Здесь $\psi_i(\mathbf{r})$ являются полевыми операторами для α- и β-компонент, концентрации которых предполагаются равными, $H_0 = -\nabla^2/2m + m\Omega^2 r^2/2 - \mu$, Ω – частота ловушки, m – масса атомов и μ – химический потенциал. Второй член в формуле (1) соответствует притягательному короткодействующему взаимодействию между α- и β-атомами (длина s-рассеяния $a < 0$) с константой взаимодействия $V = 4\pi a/m$. В гамильтониане (1) мы пренебрегли взаимодействием между $\alpha\alpha$- и $\beta\beta$-атомами, которое в случае фермионов отвечает рассеянию с угловым моментом $l \geq 1$.

Наличие притягательного взаимодействия между различными компонентами в s-канале рассеяния приводит к сверхтекучему фазовому переходу [18], параметр порядка которого $\Delta_0(\mathbf{r}) = |V| \langle \psi_\alpha(\mathbf{r})\psi_\beta(\mathbf{r})\rangle$ является комплексной функцией. В случае пространственно-однородного ферми-газа с плотностью, равной максимальной плотности n_0 газа в ловушке, критическая температура сверхтекучего перехода $T_c^{(0)}$ была бы равна [27]

$$T_c^{(0)} = 0.28\,\varepsilon_F \exp\{-1/\lambda\},$$

где $\lambda = 2|a|p_F/\pi \ll 1$ – малый параметр (газовый параметр), $p_F = mv_F = (3\pi^2 n_0)^{1/3}$ – импульс Ферми, а $\varepsilon_F = p_F^2/2m \approx \mu$ – энергия Ферми. С экспериментальной точки зрения наиболее интересен случай, когда $T_c^{(0)}$ много больше частоты ловушки: $T_c^{(0)} \gg \Omega$. При этом естественно ожидать, что критическая температура T_c сверхтекучего перехода в ловушке будет лишь незначительно отличаться от $T_c^{(0)}$. Соответствующую поправку удобнее всего найти, исходя из уравнения Гинзбурга – Ландау, учитывающего наличие внешнего гармонического удерживающего потенциала $U_{trap} = m\Omega^2 r^2/2$ (подробнее см. работу [23]):

$$\left[-\kappa^2\partial_{\mathbf{R}}^2 + \frac{1+2\lambda}{2\lambda}R^2 - \ln\frac{T_c^{(0)}}{T}\right]\Delta + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\frac{|\Delta|^2}{T^2}\Delta = 0, \qquad (2)$$

которое справедливо для температур T вблизи критической: $(T_c - T)/T_c \ll 1$. В этом уравнении $\kappa = \sqrt{7\zeta(3)/48\pi^2}\,(\Omega/T) = 0.13\,(\Omega/T) \ll 1$ ($\zeta(z)$ – дзета-функция Римана), $R = r/R_{TF}$ – расстояние от центра ловушки в единицах радиуса газового облака в приближении Томаса – Ферми $R_{TF} = v_F/\Omega$. Как обычно, критическая температура соответствует появлению нетривиального решения уравнения (2), при этом нелинейным слагаемым можно пренебречь, так как $\Delta \to 0$ при $T \to T_c$. Линеаризованное уравнение (2) по форме совпадает с уравнением Шредингера для частицы массы $1/2\kappa^2$, находящейся в сферически симметричном гармоническом потенциале с частотой $2\tilde{\kappa} = 2\kappa(1+1/2\lambda)^{1/2}$. Отсюда немедленно получаем

$$\frac{T_c^{(0)} - T_c}{T_c^{(0)}} \approx \ln\frac{T_c^{(0)}}{T_c} = 3\tilde{\kappa} \ll 1 \qquad (3)$$

для поправки к критической температуре сверхтекучего перехода в ловушке. Параметр порядка при этом пропорционален волновой функции основного состояния осциллятора:

$$\Delta_c(\mathbf{R}) \sim \varphi_0(R) \equiv (\pi l_\Delta^2)^{-3/4}\exp\left(-R^2/2l_\Delta^2\right),$$

где $l_\Delta = \kappa/\sqrt{\tilde{\kappa}} \ll 1$ конечна при $T \to 0$ и определяет размер области (в единицах R_{TF}), где возникает сверхтекучая фаза. В то же время, размер l_Δ оказывается много больше характерного масштаба $\xi_K \sim R_{TF}\,\Omega/T_c$ убывания корреляторов в нормальной фазе при температуре T_c: $l_\Delta \gg \xi_K/R_{TF}$, что оправдывает разложение по градиентам параметра порядка при получении уравнения Гинзбурга – Ландау (2). Для определения температурно-зависящего коэффициента в выражении для параметра порядка удобно записать последний в виде $\Delta(\mathbf{R},T) = \alpha(T)\,(\varphi_0(R) + \delta\varphi(\mathbf{R},T))$, где $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$ удовлетворяет условию нормировки $\int_{\mathbf{R}} |\varphi(\mathbf{R},T)|^2 = 1$ и $\alpha, \delta\varphi \to 0$ при $T \to T_c$. После этого из уравнения (2) можно определить α и $\delta\varphi$ в виде разложения по рациональным степеням $\ln(T_c/T) \approx \delta T/T_c \ll 1$. Окончательно в главном порядке получаем

$$\Delta(\mathbf{R},T) \approx \Delta_0(\mathbf{R},T) = T_c\sqrt{\frac{16\pi^2\sqrt{2}}{7\zeta(3)}\ln\frac{T_c}{T}}\cdot\exp\left(-\frac{R^2}{2l_\Delta^2}\right) \approx$$

$$\approx 5.15T_c\sqrt{\frac{T_c-T}{T_c}}\exp\left(-\frac{R^2}{2l_\Delta^2}\right). \tag{4}$$

На рис.1 приведены приближенные решения Δ_0 (сплошные кривые) и соответствующие численные решения уравнения (2) (штриховые кривые) для $T_c^{(0)}/\Omega = 5$, $\lambda = 0.3$, и $\delta T/T_c = 0.001$, 0.01, 0.03. Для этих значений $T_c^{(0)}/\Omega$ и λ имеем $\widetilde{\kappa} = 4.4\cdot 10^{-2}$, и найденная из уравнения (3) критическая температура равна $T_c = 0.87T_c^{(0)}$, что всего лишь на 1% выше, чем T_c, найденная путем численного решения уравнения (2).

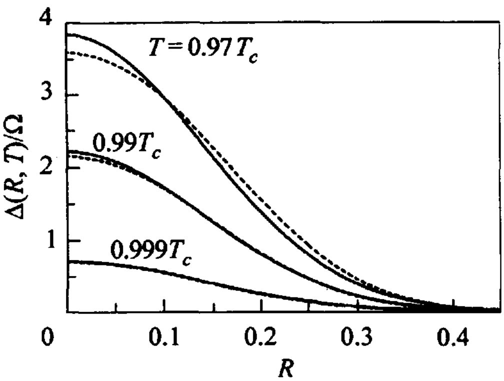

Рис.1. Параметр порядка как функция R для различных температур. Сплошные линии соответствуют $\Delta_0(R,T)$ (4), а штриховые – численному решению уравнения (2)

При произвольных температурах ниже критической параметр порядка должен определяться самосогласованно либо из уравнений Горькова на функции Грина, либо, что полностью эквивалентно, из уравнений Боголюбова – де Жена

$$H_0\begin{pmatrix} U_\nu \\ V_\nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta(\mathbf{R})V_\nu \\ -\Delta^*(\mathbf{R})U_\nu \end{pmatrix} = \varepsilon_\nu\begin{pmatrix} U_\nu \\ -V_\nu \end{pmatrix} \tag{5}$$

с условием самосогласования

$$\Delta(\mathbf{R}) = |V|\sum_\nu U_\nu(\mathbf{R})V_\nu^*(\mathbf{R})\tanh\frac{\varepsilon_\nu}{2T}. \tag{6}$$

В этих уравнениях $\varepsilon_\nu \geq 0$ – энергии одночастичных возбуждений, а $U_\nu(\mathbf{R})$, $V_\nu(\mathbf{R})$ – их волновые функции. Последние задают каноническое преобразование Боголюбова:

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha(\mathbf{R}) \\ \psi_\beta(\mathbf{R}) \end{pmatrix} = \sum_\nu\left[U_\nu(\mathbf{R})\begin{pmatrix} \alpha_\nu \\ \beta_\nu \end{pmatrix} + V_\nu^*(\mathbf{R})\begin{pmatrix} \beta_\nu^\dagger \\ -\alpha_\nu^\dagger \end{pmatrix}\right]$$

от исходных полевых операторов $\psi_\alpha(\mathbf{R})$ и $\psi_\beta(\mathbf{R})$ к операторам одночастичных возбуждений α_ν и β_ν. В рассматриваемом нами случае $T_c \gg \Omega$ решение этой задачи может быть получено с использованием уравнений Эйленбергера [28]. В результате получается замкнутое уравнение на параметр порядка $\Delta(R)$ [24]:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{1-R^2}} = \Delta\cdot\widetilde{S}_{1/2} + S_{5/2}\frac{1-R^2}{12}\left[\frac{d^2\Delta}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\Delta}{dR}\cdot\frac{2-3R^2}{1-R^2}\right] - S_{7/2}\frac{5(1-R^2)}{24\Omega^2}\left(\frac{d\Delta}{dR}\right)^2\Delta, \tag{7}$$

где $S_\alpha \equiv \pi T \sum_n \omega_n^2/(\omega_n^2+\Delta^2)^\alpha$ для $\alpha = 5/2, 7/2$ ($\omega_n = \pi T(2n+1)$ – мацубаровская частота) и

$$\widetilde{S}_{1/2} = \frac{1}{\lambda} - \gamma - \ln\frac{\Delta}{\pi T_c^{(0)}(1-R^2)} - \int_0^\infty \frac{2dx}{\exp(\frac{\Delta}{T}\cosh(x))+1},$$

$\gamma = 0.5772$ – постоянная Эйлера.

Когда температура T близка к T_c, уравнение (7) сводится к уравнению Гинзбурга – Ландау (2). Для более низких температур уравнение (7) приходится решать численно с граничными условиями $\Delta'(0) = 0$ и $\Delta(1) = 0$. На рис.2 приведены численные решения для $\Delta(R)$ при различных температурах для случая $\lambda = 0.3$ и $T_c^{(0)} = 5\Omega$ ($T_c = 0.86T_c^{(0)}$) (сплошные линии). Для сравнения штриховыми линиями при $\tau = 0$ и $\tau = 0.99$ показаны результаты для параметра порядка в приближении локальной плотности [18]. Видно, что последнее является адекватным лишь при низких температурах. Это связано с тем, что при понижении температуры область, где Δ заметно отлична от нуля, растет, а следовательно, пространственные производные Δ, которыми полностью пренебрегают в приближении локальной плотности, становятся менее важными.

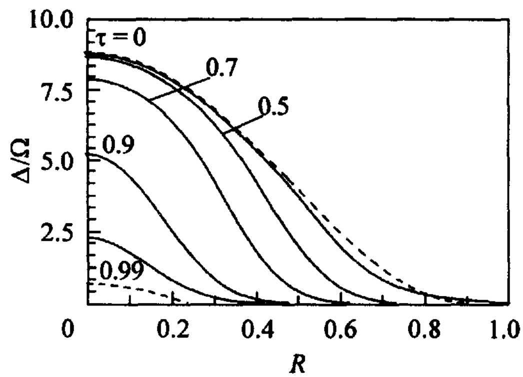

Рис.2. Параметр порядка $\Delta(R)$ при различных температурах $\tau = T/T_c$ (сплошные линии). Штриховые линии отвечают $\Delta(R)$ в приближении локальной плотности для $\tau = 0$ (верхняя кривая) и $\tau = 0.99$ (нижняя кривая)

В рассматриваемом нами сферически симметричном случае элементарные возбуждения удобно характеризовать радиальным квантовым числом n, угловым моментом l и его проекцией m на выбранную ось квантования (ось z). В силу этого представим волновые функции одночастичных возбуждений в виде $(U_\nu, V_\nu) = R^{-1}Y_{lm}(\widehat{\mathbf{R}})(u_{nl}(R), v_{nl}(R))$, где функции (u, v) нормированы условием

$$\int_0^\infty (u_{nl}u^*_{n'l} + v_{nl}v^*_{n'l})\, dR = \delta_{nn'}.$$

Уравнения на функции u, v непосредственно следуют из уравнений Боголюбова – де Жена (5) и могут быть решены численно. При этом $\Delta(R)$ определяется из уравнения (4). Однако для физически наиболее интересных состояний вблизи уровня Ферми можно решить уравнения (5) приближенно, используя для этого квазиклассическое приближение. Именно, волновые функции этих состояний в классически доступной области испытывают быстрые осцилляции с периодом порядка $p_F^{-1}(R) \ll R_{TF}$ и медленно меняющейся амплитудой $\widetilde{u}_{nl}(R)$, $\widetilde{v}_{nl}(R)$:

$$\begin{pmatrix} u_{nl} \\ v_{nl} \end{pmatrix} = \frac{\exp\left(i\widetilde{\mu}\int_{R_1}^{R} p_{Fl}dR\right)}{\sqrt{p_{Fl}(R)}} \begin{pmatrix} \widetilde{u}_{nl} \\ \widetilde{v}_{nl} \end{pmatrix} + \text{h.c.} \tag{8}$$

Здесь парциальный импульс Ферми определен как $p_{Fl}(R) = (1 - R^2 - (l + +1/2)^2/\widetilde{\mu}^2 R^2)^{1/2}$ с $\widetilde{\mu} = 2\mu/\Omega \gg 1$, а точки поворота $R_{1,2}$, определяющие классически доступную область $R_1 < R < R_2$, находятся из уравнения $p_{Fl}(R_{1,2}) = 0$. Пренебрегая в уравнениях (5) членами порядка $\widetilde{\mu}^{-1}$, для амплитуд $f_\pm = \widetilde{u} \pm i\widetilde{v}$ получаем пару расцепленных уравнений

$$\left[-\left(p_{Fl}\frac{d}{dR}\right)^2 + \widehat{\Delta}^2 \pm p_{Fl}\frac{d\widehat{\Delta}}{dR} - \widehat{\varepsilon}_{nl}^2\right] f_{nl\pm} = 0, \tag{9}$$

где $\widehat{\varepsilon}_{nl} = \varepsilon_{nl}/\Omega \geq 0$, $\widehat{\Delta} = \Delta/\Omega$.

В классически недоступных областях $0 < R < R_1$ (из-за центробежного потенциала) и $R > R_2$ (из-за удерживающего потенциала) уравнения (8) и (9) должны быть модифицированы с помощью замены $p_{Fl}(R)$ на $\mp i\,|p_{Fl}(R)|$, соответственно, чтобы получить убывающие решения.

Выше T_c параметр порядка равен нулю, и, записав химический потенциал μ в виде $\mu = (j + 3/2)\Omega$ с некоторым целым j, из уравнения (9) легко получаем известный ответ $\varepsilon_{nl}^{(0)} = |2n + l - j|\,\Omega$ для собственных энергий частичных ($2n + l \geq j$, $\widetilde{v}_{nl} = 0$) и дырочных ($2n + l \leq j$, $\widetilde{u}_{nl} = 0$) возбуждений.

Появление параметра порядка $\Delta(R)$ ниже температуры перехода модифицирует энергетический спектр. При температурах, близких к T_c, параметр порядка мал и отличен от нуля только в малой центральной части радиуса $l_\Delta \ll 1$ газового облака (см. (4)). Поэтому наличие $\Delta(R)$ влияет только на возбуждения с малыми орбитальными моментами l, слегка увеличивая их собственные значения. Этот сдвиг будет порядка $\delta = \Delta(R_1)l_\Delta$, то есть много меньше максимального значения $\Delta(0)$ пространственно неоднородной щели $\Delta(R)$, в силу чего наинизшие по энергии возбуждения (для которых $\varepsilon_{nl}^{(0)} = 0$ при $T > T_c$) оказываются внутрищелевыми: $\varepsilon_{nl} \sim \delta \ll \Delta(0)$.

При более низких температурах характерный пространственный размер параметра порядка становится сравним с размером газового облака R_{TF}, и все существенные возбуждения ($l \lesssim \widetilde{\mu}/2$) модифицируются присутствием параметра порядка $\Delta(R)$. При этом волновые функции надщелевых возбуждений ($\varepsilon_{nl} > \Delta(R_1)$) отличны от нуля во всей классически доступной области $R_1 < R < R_2$, в то время как для внутрищелевых возбуждений с энергиями ε_{nl} много меньше,чем $\Delta(R_1)$, она "выдавлена" из центральной части: эти возбуждения в основном локализованы в потенциальной яме, образованной во внутренней своей части параметром порядка $\Delta(R)$ и потенциалом ловушки снаружи (см. рис.3).

Не останавливаясь подробно на выписывании довольно громоздких волновых функций (подробности см. в работе [24]), приведем лишь квазиклассические условия квантования на спектр одночастичных возбуждений. Для надщелевых возбуждений ($\varepsilon_{nl} > \Delta(R)$) оно имеет следующий вид:

$$\frac{2}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{\varepsilon_{nl}^2 - \Delta^2(R)}}{p_{Fl}(R)} dR = \varepsilon_{nl}^{(0)}. \tag{10}$$

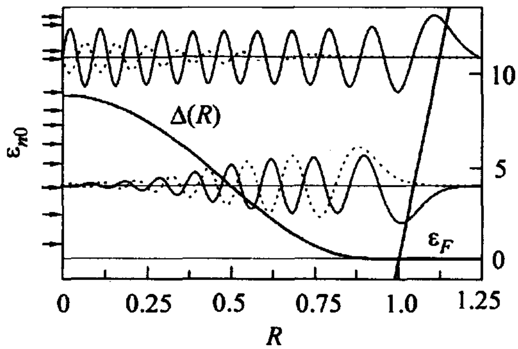

Рис.3. Волновые функции U_{n0} (сплошные линии) и V_{n0} (пунктирные линии) для надщелевых и подщелевых возбуждений, полученные с помощью численного решения уравнений (5) для $l = 0$ при $T = 0$, причем с целью уменьшить число осцилляций было выбрано значение $\tilde{\mu} = 63$ вместо фактического $\tilde{\mu} \approx 970$, отвечающего $T_c^{(0)}/\Omega = 5$ и $\lambda = 0.3$. Стрелки вдоль вертикальной оси указывают на собственные значения энергии одночастичных возбуждений

Для внутрищелевых возбуждений появляется новая особая точка поворота R_c, определяемая условием $\varepsilon_{nl} = \Delta(R_c)$, в которой частица испытывает андреевское отражение [29] от пространственно-неоднородной щели $\Delta(R)$, превращаясь в дырку, и наоборот. В силу этого, условия квантования оказываются более громоздкими:

$$(-1)^{j-l}\cos(2\phi) = 2Z^2/(Z^4+1), \tag{11}$$

где

$$Z = \sqrt{2}\exp\left\{\int_{R_1}^{R_c}\sqrt{\Delta^2(R)-\varepsilon_{nl}^2}/p_{Fl}(R)dR\right\}, \quad \phi = \int_{R_c}^{R_2}\sqrt{\varepsilon_{nl}^2-\Delta^2(R)}/p_{Fl}(R)dR.$$

Волновые функции этих состояний в основном сосредоточены в области $R_c < R < R_2$, где амплитуды $\widetilde{u}_{nl}$ и $\widetilde{v}_{nl}$ осциллируют, и экспоненциально убывают при $R_1 < R < R_c$ (см. рис.3). Отметим, что существование внутрищелевых возбуждений целиком связано с пространственной неоднородностью $\Delta(R)$, поэтому в определенной степени они аналогичны локализованным состояниям внутри вихря в обычных сверхпроводниках [30].

Как видно из приведенных формул, ниже температуры перехода энергии одночастичных возбуждений становятся зависящими от температуры и более не являются целыми кратными частоты ловушки Ω. Поэтому, если отклик газового облака на какое-либо периодическое внешнее воздействие определяется в основном одночастичными возбуждениями, то его резонансная структура, наблюдавшаяся выше точки перехода, при переходе через последнюю будет размываться, и размытие будет тем больше, чем ниже температура (см., например, работу [31]).

Перейдем теперь к рассмотрению низкоэнергетических коллективных возбуждений. Естественно ожидать, что при низких температурах (но выше точки сверхтекучего перехода) ферми-газ находится в бесстолкновительном режиме. Это подразумевает, что период осцилляций в ловушке $2\pi/\Omega$ много меньше характерной частоты столкновений в вырожденном ферми-газе, которая по порядку величины равна $\tau^{-1} \sim na^2v_F(T_c/\varepsilon_F)^2 \sim \lambda^2T_c^2/\varepsilon_F$, где na^2v_F – частота столкновений в классическом газе, а множитель $(T_c/\varepsilon_F)^2$ является результатом принципа Паули. Поэтому критерий бесстолкновительного режима имеет вид $\Omega\tau \sim \lambda^{-2}(\Omega/T_c)\exp(1/\lambda) \gg 1$.

Соответствующие коллективные возбуждения в нормальной фазе (нулевой звук) были рассмотрены на основе правил сумм в работе [15] (см. также [16]), в которой были, в частности, вычислены собственные частоты ω_{nl} для низших монопольной,

$\omega_{00} \approx 2\Omega$, и квадрупольной, $\omega_{02} \approx \sqrt{2}\Omega$, мод. В случае сверхтекучего газа малые отклонения от равновесия могут быть исследованы [25] на основе нестационарных уравнений Боголюбова – де Жена

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} U_\nu(\mathbf{r},t) \\ V_\nu(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = H_0\begin{pmatrix} U_\nu(\mathbf{r},t) \\ -V_\nu(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} - \Delta(\mathbf{r},t)\begin{pmatrix} V_\nu(\mathbf{r},t) \\ U_\nu(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \tag{12}$$

совместно с условием самосогласования

$$\Delta(\mathbf{r},t) = |V|\sum_\nu U_\nu(\mathbf{r},t)V_\nu^*(\mathbf{r},t)\tanh\frac{\varepsilon_\nu}{2T}. \tag{13}$$

При этом предполагается, что когда $t \to -\infty$, зависящий от времени параметр порядка и волновые функции стремятся к своим равновесным значениям: $\Delta(\mathbf{r},t) \to \Delta_0(\mathbf{r})$ и $(U_\nu(\mathbf{r},t), V_\nu(\mathbf{r},t)) \to (U_\nu(\mathbf{r}), V_\nu(\mathbf{r}))\exp(-i\varepsilon_\nu t)$, где $U_\nu(\mathbf{r})$, $V_\nu(\mathbf{r})$ – волновые функции одночастичных возбуждений с энергией $\varepsilon_\nu \geq 0$ (решения стационарного уравнения Боголюбова – де Жена (5) с $\Delta = \Delta_0(\mathbf{r})$).

Низкоэнергетические коллективные возбуждения соответствуют малым флуктуациям фазы параметра порядка (боголюбовский звук). При этом $\Delta(\mathbf{r},t) = \Delta_0(\mathbf{r})\exp(2i\varphi(\mathbf{r},t)) \approx \Delta_0(\mathbf{r})(1+2i\varphi(\mathbf{r},t))$, где $\varphi(\mathbf{r},t) \ll 1$ – медленно меняющаяся в пространстве и времени вещественная функция. Уравнение (13) может быть решено по теории возмущений, и после подстановки найденных решений в (12) получаем следующее уравнение на $\varphi_\omega(\mathbf{r}) = \int dt\varphi(\mathbf{r},t)\exp(i\omega t)$:

$$\Delta_0(\mathbf{r})\varphi_\omega(\mathbf{r}) = |V|\sum_{\nu,\nu_1}\left\{\frac{U_{\nu_1}(\mathbf{r})V_\nu^*(\mathbf{r})}{\omega-\varepsilon_{\nu_1}+\varepsilon_\nu+i0}M^{(1)}_{\nu_1\nu}(\omega)\left[\tanh\frac{\varepsilon_{\nu_1}}{2T}-\tanh\frac{\varepsilon_\nu}{2T}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{U_{\nu_1}(\mathbf{r})U_\nu(\mathbf{r})}{\omega-\varepsilon_{\nu_1}-\varepsilon_\nu+i0}M^{(2)*}_{\nu_1\nu}(-\omega)-\frac{V^*_{\nu_1}(\mathbf{r})V^*_\nu(\mathbf{r})}{\omega+\varepsilon_{\nu_1}+\varepsilon_\nu+i0}M^{(2)}_{\nu_1\nu}(\omega)\right]\tanh\frac{\varepsilon_\nu}{2T}\right\}, \tag{14}$$

где

$$M^{(2)}_{\nu_1\nu}(\omega) = \int_\mathbf{r}\Delta_0\varphi_\omega(U_{\nu_1}U_\nu+V_{\nu_1}V_\nu),$$

$$M^{(1)}_{\nu_1\nu}(\omega) = \int_\mathbf{r}\Delta_0\varphi_\omega(U^*_{\nu_1}V_\nu-V^*_{\nu_1}U_\nu) = -M^{(1)*}_{\nu\nu_1}(-\omega).$$

Для случая $(T_c-T)/T_c \ll 1$ уравнение (14) может быть преобразовано к виду

$$-\frac{7\zeta(3)}{6\pi^3}\frac{\Omega^2}{T_c}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\nabla_\mathbf{R}\left[(1-R^2)^{3/2}\nabla_\mathbf{R}\varphi(\mathbf{R})\right]+$$
$$+2(1-R^2)\nabla_\mathbf{R}\ln\Delta_0\nabla_\mathbf{R}\varphi(\mathbf{R})\Big)= i\omega\varphi(\mathbf{R}), \tag{15}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}/R_{TF}$, откуда следует, что при $T \approx T_c$ собственные частоты ω являются чисто мнимыми. Это означает, что в этом случае коллективные моды быстро распадаются на пары одночастичных возбуждений.

Для $T \ll T_c$ уравнение (14) можно свести к виду

$$-\frac{\Omega^2}{3}\frac{1}{\sqrt{1-R^2}}\nabla_\mathbf{R}\left[(1-R^2)^{3/2}\nabla_\mathbf{R}\varphi\right] = \omega^2\varphi, \tag{16}$$

где удержаны только главные члены в разложении по градиентам и частоте. Как видно из этого уравнения, собственные частоты коллективных мод являются вещественными и порядка частоты ловушки Ω. Будучи возбужденными при $T \ll T_c$, эти коллективные моды приводят к осцилляциям сверхтекучего тока $\mathbf{j} = (i/m) \sum_\nu (V_\nu^* \nabla V_\nu - V_\nu \nabla V_\nu^*) = (n/m) \nabla \varphi$ и плотности $n = 2 \sum_\nu \mid v_\nu \mid^2 = n_0 + \delta n$. Последние связаны друг с другом уравнением сохранения числа частиц $\partial \delta n / \partial t + \mathrm{div} \mathbf{j} = 0$, которое непосредственно следует из уравнений (12) и (13). В результате, все газовое облако осциллирует:

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}) + \delta n(\mathbf{r}, t) \approx \left[1 + \frac{1}{m} \nabla^2 f\right] \quad n_0(\mathbf{r} + \frac{1}{m} \nabla f),$$

где $f(\mathbf{r}, t) = \int^t \varphi(\mathbf{r}, t') dt'$.

Уравнение (16) не содержит затухания коллективных мод, которое в основном связано с процессами неупругого рассеяния низкоэнергетических внутрищелевых возбуждений на коллективный моде или с процессами распада коллективной моды на два внутрищелевых одночастичных возбуждения (см работу [32] для более подробного обсуждения аналогичных механизмов в случае бозе-газа в ловушке). В обоих случаях энергия коллективной моды преобразуется в нормальную компоненту (составленную из внутрищелевых возбуждений) во внешней части газового облака. А так как волновые функции внутрищелевых возбуждений экспоненциально затухают в центральной части газового облака, где в основном и сосредоточена сверхтекучая компонента, то связь между флуктуациями параметра порядка и внутрищелевыми одночастичными возбуждениями оказывается экспоненциально слабой ($\sim \exp(-T_c/\Omega)$). Поэтому можно ожидать, что затухание коллективных мод будет малым.

Уравнение (16) можно также получить в рамках квантования гидродинамического движения сверхтекучего ферми-газа. Соответствующий гамильтониан для случая малой сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_s = m^{-1} \nabla \varphi$ и малого отклонения δn плотности частиц от равновесного распределения $n_0(r)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_h &= \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2} m n \mathbf{v}_s^2 + U(n) \right\} \approx \\ &\approx \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{2m} n_0 (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} U''(n_0) \delta n^2 + U(n_0) \right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $U(n)$ – зависящая от плотности часть энергии, причем равновесное распределение плотности n_0 удовлетворяет условию $U'(n_0) = 0$. В приближении Томаса – Ферми

$$U(n) = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{n^{5/3}}{m} + \left(\frac{m \Omega^2 r^2}{2} - \mu \right) n, \tag{18}$$

где первый член отвечает энергии заполненной ферми-сферы, откуда получаем следующее выражение для равновесного распределения плотности: $n_0(r) = (p_F^3 / 3\pi^2)(1 - (r/R_{TF})^2)^{3/2}$. Отметим, что в выражении (18) отброшены эффекты межчастичного взаимодействия и куперовского спаривания, так как они пропорциональны малым параметрам λ и $(T_c/\varepsilon_F)^2$, соответственно. Для величины $U''(n_0)$, входящей в уравнение (17), имеем: $U''(n_0) = (3\pi^2)^{-2/3} N(r)^{-1}$, где $N(r) = (m p_F / \pi^2) \sqrt{1 - (r/R_{TF})^2}$ –

плотность состояний на локальной поверхности Ферми, и, используя стандартные коммутационные соотношения $[\delta n(\mathbf{r}_1), \varphi(\mathbf{r}_2)] = i\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, получаем

$$\partial\varphi/\partial t = i\,[H_h, \varphi] = U''(n_0)\delta n, \quad \partial(\delta n)/\partial t = i\,[H_h, \delta n] = -\nabla(n_0 \nabla\varphi).$$

Из этих уравнений немедленно следует уравнение (16) на флуктуацию фазы и уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta n + \frac{\Omega^2}{3}\nabla_{\mathbf{R}}\left[(1-R^2)^{3/2}\nabla_{\mathbf{R}}\frac{\delta n}{\sqrt{1-R^2}}\right] = 0 \tag{19}$$

на флуктуацию плотности.

Уравнение (16) (или (19)) вместе с условием конечности φ (или δn) для любого $R \leq 1$ определяет энергетический спектр коллективных мод

$$(\omega_{nl}/\Omega)^2 = l + \frac{4}{3}n(n+l+2), \ l = 0, 1, 2, \ldots \tag{20}$$

и соответствующие собственные функции

$$\varphi_{nl}(\mathbf{R}) \propto R^l \ {}_2F_1(-n, n+l+2; \frac{3}{2}+l; R^2) \mathrm{Y}_{lm}(\theta, \phi), \tag{21}$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция, l – орбитальный момент коллективной моды, а n – целое число ($n = 0, 1, 2, \ldots$ для ненулевого l и $n = 1, 2, \ldots$ для $l = 0$). Отметим, что собственные функции (21) ортогональны с весом $1/\sqrt{1-R^2}$. Следует также подчеркнуть, что спектр (20) совпадает со спектром собственных колебаний нормального ферми-газа в гидродинамическом (столкновительном) режиме [14], что впрочем не удивительно, так как вклад сверхтекучего спаривания в гидродинамический гамильтониан (17), как уже отмечалось выше, мал.

Теперь мы можем сравнить собственные частоты коллективных мод нормального ферми-газа в бесстолкновительном режиме выше T_c с собственными частотами коллективных мод сверхтекучего газа при $T \ll T_c$. Особый интерес с экспериментальной точки зрения представляют низшие по энергии собственные колебания, так как они могут быть легко возбуждены с помощью модулирования частот ловушки. (Малое возмущение внешнего потенциала $V_{ext}\exp(-i\omega t)$ приводит к появлению дополнительного члена $-i\omega V_{ext}\exp(-i\omega t)$ в правой части уравнения (16).) В сверхтекучей фазе, как это следует из уравнения (20), низшая собственная частота ω_{10} монопольной "дышащей" моды ($l = 0$, $n = 1$) равна 2Ω (этот результат также может быть получен на основе правила сумм[2)]), а низшая собственная частота ω_{01} для дипольной моды ($l = 1$, $n = 0$) равна, как и следовало ожидать, частоте ловушки Ω (эта мода отвечает движению газового облака как целого во внешнем гармоническом потенциале ловушки). Таким образом, эти собственные частоты совпадают с частотами коллективных колебаний нормального ферми-газа в бесстолкновительном режиме, вычисленными в работе [15]. В то же время, частоты низших по энергии квадрупольных мод различны: для сверхтекучей фазы из уравнения (20) получаем $\omega_{02} = \sqrt{2}\Omega$, в то время как для нормальной фазы в бесстолкновительном режиме имеем 2Ω [15]. Экспериментально квадрупольную моду можно возбудить с помощью малой противофазной модуляции частоты ловушки, например, в направлениях x и y: $V_{ext}(\mathbf{r}, t) = (m\Omega^2/2)(x^2 - y^2)\zeta\cos(\omega t)$, где $\zeta \ll 1$. При этом отклик газового

[2)] А.Дж.Легет (A.J.Leggett), частное сообщение.

образца будет содержать резонансы в амплитуде колебаний плотности на частотах, отвечающих собственным частотам коллективных колебаний. Для $T > T_c$ низший по энергии резонанс будет на частоте 2Ω, в то время как для $T \ll T_c$ он будет существовать на частоте $\sqrt{2}\Omega$. (При температурах, близких к критической, резонансный пик будет сильно размыт, так как в этой области затухание коллективных мод велико.) Подобное поведение резонансной линии будет явным свидетельством появления в системе сверхтекучего параметра порядка. (Как уже говорилось выше, другим свидетельством могло бы служить изменение в поведении одночастичных возбуждений.)

Подчеркнем, что вопрос об экспериментальном детектировании возникновения сверхтекучей фазы в рассматриваемой ферми-газовой системе в ловушке является не столь очевидным, так как в отличие от случая бозе-газа, когда возникновение бозе-конденсата сопровождается ярко выраженным изменением распределения плотности газа, в случае ферми-газа изменение распределения плотности при сверхтекучем переходе совсем незначительно, в силу чего прямое оптическое детектирование перехода невозможно. Помимо двух приведенных выше методов, возможные способы выявления присутствия сверхтекучей фазы обсуждались также в работах [33, 34]. В первой из них предлагалось детектировать сверхтекучий переход по изменению малоуглового рассеяния нерезонансного лазерного луча на газовом облаке, а во второй – по изменению его момента инерции.

Автор выражает благодарность Й.Т.М.Вальравену, Л.Вики, Ю.Кагану, М.Ю.Кагану, А.Дж.Легету, Д.С.Петрову и Г.В.Шляпникову за полезные и стимулирующие обсуждения, а также Российский фонд фундаментальных исследований (грант # 97-02-16532) за поддержку.

---

1. M.H.Anderson, J.R.Ensher, M.R.Matthews et al., Science **269**, 198 (1995).
2. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tolett, and R.G.Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
3. K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. F.Dalfovo, S.Giorgini, L.P.Pitaevskii, and S.Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
5. W.C.Stwalley, Phys. Rev. Lett. **37**, 1628 (1976); E.Tiesinga, D.J.Verhaar, and H.T.C.Stoof, Phys. Rev. **A47**, 4114 (1993); P.O.Fedichev, Yu.Kagan, G.V.Shlyapnikov, and J.T.M.Walraven, Phys. Rev. Lett. **77**, 2913 (1996).
6. B.DeMarco, J.L.Bohn, J.P.Burke, Jr. et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 4208 (1999).
7. M.J.Holland, B.DeMarco, and D.S.Jin, Phys. Rev. **A61**, 053610 (2000).
8. L.Viverit, S.Giorgini, L.P.Pitaevskii, and S.Stringari, e-print cond-mat/0005517.
9. B.deMarco and D.S.Jin, Science **285**, 1703 (1999).
10. Th.Busch, J.R.Anglin, J.I.Cirac, and P.Zoller, Europhys. Lett. **44**, 1 (1998).
11. B.DeMarco and D.S. Jin, Phys. Rev. **A58**, R4267 (1998).
12. J.Ruostekoski and J.Javanainen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4741 (1999).
13. G.Ferrari, Phys. Rev. **A59**, R4125 (1999).
14. G.M.Bruun and C.W.Clark, Phys. Rev. Lett. **83**, 5415 (1999).
15. L.Vichi and S.Stringari, Phys. Rev. **A60**, 4734 (1999).
16. L.Vichi, e-print cond-mat/0006305.
17. E.R.I.Abraham, W.I.McAlexander, J.M.Gerton, et al., Phys. Rev. **A55**, R3299 (1997).
18. H.T.C.Stoof, M.Houbiers, C.A.Sackett, and R.G.Hulet, Phys. Rev. Lett. **76**, 10 (1996).
19. J.L.Bohn, e-print cond-mat/9911132.
20. M.Houbiers, R.Ferwerda, H.T.C.Stoof et al., Phys. Rev. **A56**, 4864 (1997).
21. M.A.Baranov, Yu.Kagan, and M.Yu.Kagan, Pis'ma Zh ETF. **64**, 273 (1996) [JETP Lett. **64**, 301 (1996)].
22. L.You and M.Marinescu, Phys. Rev. **A60**, 2324 (1999).
23. M.A.Baranov and D.S.Petrov, Phys. Rev. **A58**, R801 (1998).

24. M.A.Baranov, Pis'ma ZhETF **70**, 392 (1999) [JETP Lett. **70**, 396 (1999)], e-print cond-mat/9801142.
25. M.A.Baranov and D.S.Petrov, Phys. Rev. **A62**, (2000).
26. G.M.Bruun, Y.Castin, R.Dum, and K.Burnett, Eur. Phys. J. **D7**, 433 (1999).
27. L.P.Gor'kov and T.K.Melik-Barkhudarov, ZhETF **40**, 1452 (1961) [Sov. Phys. JETP **13**, 1018 (1961)].
28. G.Eilenberger, Zeitschr. für Phys. **B214**, 195 (1968).
29. A.F.Andreev, Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964).
30. C.Caroli, P.G.de Gennes, and J.Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
31. G.M.Bruun and C.W.Clark, e-print cond-mat/9906392.
32. P.O.Fedichev, G.V.Shlyapnikov, and J.T.M.Walraven, Phys. Rev. Lett. **80**, 2269 (1998), and references therein.
33. F.Weig and W.Zwerger, Europhys. Lett. **49**, 282 (2000).
34. F.Zambelli and S.Stringari, e-print cond-mat/0004325.