РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Проект РФФИ # 97-02-17927

Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.7, стр.566 - 576

РЕДУЦИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ И НЕКОММУТАТИВНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Ю.М. Макеенко[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 сентября 2000 г.

Дается краткий обзор связи между редуцированными моделями и некоммутативной теорией Янга – Миллса (НКЯМ). Рассмотрены: твистованная модель Эгучи – Каваи, отображение на НКЯМ, эквивалентность Мориты, фундаментальная материя, петли Вильсона в НКЯМ, интерпретация через D-браны.

PACS: 11.15.Pg, 11.25.Sq

Возникший недавно интерес к некоммутативным калибровочным теориям был инициирован работой [1], посвященной компактификации матричной теории [2, 3][2)]. Матричная теория принадлежит к классу редуцированных моделей [5], для которых (бесконечные) матрицы не зависят от пространственных координат, в то время как эта зависимость возникает при разложении вблизи классического вакуума. Для того, чтобы редуцированные модели при большом N были эквивалентны квантовой теории поля в пределе Тоофта на непрерывном пространстве-времени, они должны быть либо "заморожены" [6], либо твистованы [7 – 10].

Недавно было осознано [11], что существует предел твистованных редуцированных моделей, когда они описывают квантовые теории поля на некоммутативном пространстве, координаты которого представлены операторами $\hat{x}^\mu$, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}\hat{1}\,. \tag{1}$$

Умножение полей задается некоммутативным произведением

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_1(x) \exp\left\{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_\mu}\theta_{\mu\nu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right\}\phi_2(x)\,, \tag{2}$$

[1)] e-mail: makeenko@itep.ru

[2)] *Для обзора матричной теории см.* [4].

которое обладает свойством ассоциативности. Действие некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории определено как

$$S = \frac{1}{4e^2}\int \mathcal{F}^2\,, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i\left(\mathcal{A}_\mu * \mathcal{A}_\nu - \mathcal{A}_\nu * \mathcal{A}_\mu\right) \tag{4}$$

обозначает некоммутативную напряженность калибровочного поля. Описание [9] планарного предела $U(N)$ теории Янга – Миллса соответствует $\theta \to \infty$. Эта связь между твистованными редуцированными моделями и некоммутативными калибровочными теориями была развита в работах [12–16]. В частности, для некоммутативных калибровочных теорий были построены соответствующие наблюдаемые.

В настоящей статье дается обзор связи между твистованными редуцированными моделями и некоммутативными калибровочными теориями. Особое внимание уделено эквивалентности между некоторыми некоммутативными и обычными (или "коммутативными") калибровочными теориями, которая носит название эквивалентность Мориты [17]. Простейший пример – это упомянутая выше эквивалентность некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории в пределе большого θ и обычной $U(N)$ теории Янга – Миллса в пределе большого N. Другой пример – это то, что некоммутативная $U_\theta(1)$ калибровочная теория в ящике с периодическими граничными условиями эквивалентна при рациональных значениях безразмерного параметра некоммутативности обычной теории Янга – Миллса в ящике меньшего размера с твистованными граничными условиями, которые задают неабелев поток калибровочного поля, известный как поток Тоофта [18]. Эти результаты получены на основе твистованной редуцированной модели при конечном N, которая отображена на некоммутативную калибровочную теорию на решетке конечной протяженности в пространстве, благодаря чему результаты являются строгими для регуляризованной квантовой теории поля. Приводится обобщение эквивалентности Мориты на случай, когда присутствуют поля материи в фундаментальном представлении калибровочной группы, которое основано на использовании соответствующей твистованной редуцированной модели [19]. Вычисление континуального интеграла по полям фундаментальной материи определяет наблюдаемые величины в некоммутативной калибровочной теории, которые выражаются как через замкнутые, так и через открытые петли Вильсона. Представлено описание эквивалентности Мориты как Т-дуальности в терминах D-бран.

Твистованная модель Эгучи – Каваи

1. Определение [9]. Твистованная модель Эгучи – Каваи (ТЭК) строится из D штук $N \times N$ унитарных матриц U_μ^{ij} $(\mu = 1, \ldots, D)$. Статистическая сумма

$$Z_{\text{ТЭК}} = \int \prod_\mu dU_\mu \exp\left\{\frac{1}{2g^2}\sum_{\mu\neq\nu} Z^*_{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\,U_\mu U_\nu U_\mu^\dagger U_\nu^\dagger + \mathrm{h.c.}\right\} \tag{5}$$

принадлежит к типу вильсоновской решеточной калибровочной теории[3] на единичном гиперкубе с твистованными граничными условиями. Входящий в действие фак-

[3] Для обзора калибровочных теорий на решетке см. [20].

тор $Z_{\mu\nu}$ имеет вид

$$Z_{\mu\nu} = e^{4\pi i n_{\mu\nu}/N} \in \mathbb{Z}_N \qquad (\text{целое } \ n_{\mu\nu} = -n_{\nu\mu})\,, \tag{6}$$

где предположено, что N нечетно.

ТЭК обладает симметриями

$$\text{калибровочная}: \qquad U_\mu \to \Omega U_\mu \Omega^\dagger\,, \tag{7}$$

$$\mathbb{Z}_N^D: \quad U_\mu \to Z_\mu U_\mu \quad (Z_\mu \in \mathbb{Z}_N)\,. \tag{8}$$

Вакуумное состояние дается с точностью до калибровочного преобразования матрицами

$$U_\mu^{\mathrm{cl}} = \Gamma_\mu\,, \tag{9}$$

где Γ_μ суть твиститоры, удовлетворяющие коммутационному соотношению Вейля – Тоофта

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu = Z_{\mu\nu} \Gamma_\nu \Gamma_\mu\,. \tag{10}$$

Их явный вид известен для любых $n_{\mu\nu}$.

Простейший твист соответствует

$$n_{\mu\nu} = L^{D/2-1}\varepsilon_{\mu\nu}\,, \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & +1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \end{pmatrix} \tag{11}$$

и $N = L^{D/2}$. Группу $SU(N)$ можно тогда представить в виде прямого произведения $SU(N) \supset \prod_1^{D/2} \otimes SU(L)$, так что Γ_i, Γ_{i+1} $(i = 1, \ldots, D/2)$ можно выбрать в виде вейлевских унитарных матриц $h^{jk} = \delta^{j+1,k}$ и $g^{jk} = e^{4\pi i (j-1)/L}\delta^{jk}$ для каждой из $SU(L)$. Тогда $\Gamma_\mu^L = 1$ для такого простейшего твиста.

2. Непрерывный предел ТЭК [10]. Непрерывный предел ТЭК достигается, когда постоянная решетки $a \to 0$ $(N \to \infty)$, так что

$$U_\mu = e^{iaA_\mu}\,, \qquad \Gamma_\mu = e^{ia\gamma_\mu}\,, \tag{12}$$

где A_μ и γ_μ – (бесконечные) эрмитовы матрицы. Соотношение (10) превращается в коммутатор Гейзенберга:

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = iB_{\mu\nu}\,, \qquad B_{\mu\nu} = 4\pi n_{\mu\nu}/Na^2\,. \tag{13}$$

Действие непрерывной ТЭК становится равным

$$S = \frac{1}{4g^2}\,\mathrm{tr}\,\left([A_\mu, A_\nu] - iB_{\mu\nu}\right)^2\,, \tag{14}$$

а вакуумная конфигурация принимает вид

$$A_\mu^{\mathrm{cl}} = \gamma_\mu \tag{15}$$

с точностью до калибровочного преобразования $A_\mu \to \Omega A_\mu \Omega^\dagger$. Петли Вильсона в теории Янга – Миллса при большом N представляются в виде

$$W(C) = \left\langle \frac{1}{N} \operatorname{tr} \mathrm{P} \exp\left\{-\mathrm{i} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\xi^\mu \gamma_\mu\right\} \frac{1}{\mathrm{N}} \operatorname{tr} \mathrm{P} \exp\left\{\mathrm{i} \int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\xi^\mu \mathrm{A}_\mu\right\}\right\rangle_{\text{тэк}}, \tag{16}$$

где усреднение означает интегрирование по (бесконечным) матрицам A_μ с действием (14). Петли Вильсона нетривиальны, поскольку A_μ не коммутируют друг с другом. Первый след в правой части уравнения (16) обращается в нуль для открытых петель. Для замкнутых петель он принимает вид экспоненты от потока поля $B_{\mu\nu}$ через поверхность, ограниченную контуром C.

3. Компактификация редуцированных моделей. Компактификацию редуцированных моделей на D-мерный тор $\mathbb{T}^D$ можно описать [1], налагая на A_μ условие

$$A_\mu + 2\pi R_\mu \delta_{\mu\nu} = \Omega_\nu A_\mu \Omega_\nu^\dagger, \tag{17}$$

где Ω_ν – унитарные матрицы. Взяв матричный след от обеих частей уравнения (17), мы видим, что решение возможно только для бесконечных матриц (= эрмитовых операторов).

Экспоненцируя уравнение (17) с размерным параметром a, получим

$$e^{2\pi i a \delta_{\mu\nu} R_\mu} U_\mu = \Omega_\nu U_\mu \Omega_\nu^\dagger, \tag{18}$$

где A_μ экспоненцированы согласно уравнению (12), и U_μ унитарны. Уравнение (18) является $N \times N$-матричной дискретизацией уравнения (17) и имеет решения (простейшее из которых приведено ниже) при конечном N.

Взяв матричный след от обеих частей уравнения (18), мы видим, что матрицы U_μ должны быть бесследными, как это имеет место для твиститоров. Взяв детерминант от обеих частей уравнения (18), мы заключаем, что $aR_\mu N$ должно быть целым. Самосогласованность уравнения (18) требует также, чтобы

$$\Omega_\mu \Omega_\nu = z\, \Omega_\nu \Omega_\mu \tag{19}$$

с некоторым $z \in \to_N$. Условие (18) на унитарные матрицы U_μ совместимо с калибровочной симметрией (7), если матрица калибровочного преобразования Ω коммутирует с матрицами Ω_ν.

4. Решение при конечном N [14]. Чтобы описать решение уравнения (18), удобно ввести базис Вейля на $gl(N)$:

$$J_k = \Gamma_1^{k_1} \cdots \Gamma_D^{k_D} \exp\left\{2\pi i \frac{1}{N} \sum_{\mu>\nu} n_{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right\}, \tag{20}$$

где последний сомножитель обеспечивает симметричность произведения матриц, и $J_{L-k} = J_k^\dagger$. Произведение двух генераторов раскладывается по базису как

$$J_k J_q = J_{k+q} \exp\left\{2\pi i \frac{1}{N} \sum_{\mu,\nu} k_\mu n_{\mu\nu} q_\nu\right\}. \tag{21}$$

Последний фактор ответствен за некоммутативность.

Для построения решения выберем

$$\Omega_\mu = \prod_\nu \Gamma_\nu^{m\varepsilon_{\mu\nu}}, \tag{22}$$

где m – целое. Тогда

$$U_\mu^{(0)} = \Gamma_\mu \tag{23}$$

есть частное решение уравнения (18), в то время как общее решение можно записать в виде

$$U_\mu = V_\mu \Gamma_\mu, \tag{24}$$

где V_μ удовлетворяет однородному уравнению:

$$V_\mu = \Omega_\nu V_\mu \Omega_\nu^\dagger. \tag{25}$$

Решение уравнения (25) представляется в виде

$$V_\mu^{ij} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_m} (J_k^n)^{ij}\, U_\mu(k), \tag{26}$$

где n, определенное как отношение $n = L/m$, является целым, а k изменяется от 1 до m, поскольку $\Gamma_\mu^L = 1$. Построенная таким образом матрица V_μ очевидным образом коммутирует с Ω_ν.

По заданным c-числовым коэффициентам $U_\mu(k)$, которые описывают динамические степени свободы, можно с помощью преобразования Фурье построить поле

$$\mathcal{U}_\mu(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_m} \exp\left\{2\pi i \frac{kx}{am}\right\} U_\mu(k), \tag{27}$$

являющееся периодической функцией на ребрах решетки протяженности m^D (или, что эквивалентно, на дискретном торе $\mathbb{T}_m^D$). Таким образом, пространственная протяженность решетки равна $l = am$. Поле $\mathcal{U}_\mu(x)$ описывает те же самые степени свободы, что и $N \times N$-матрица U_μ^{ij}, ограниченная условием (18). Условие унитарности $U_\mu U_\mu^\dagger = 1$ принимает вид

$$\mathcal{U}_\mu(x) * \mathcal{U}_\mu^*(x) = 1, \tag{28}$$

где $\mathcal{U}_\mu^*$ обозначает комплексное сопряжение, а некоммутативное произведение функций на решетке определено как

$$f(x) * g(x) = \sum_{y,z} \exp\left\{2i(\theta^{-1})_{\mu\nu} y_\mu z_\nu\right\} f(x+y) g(x+z), \tag{29}$$

где

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{a^2 mn}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} = \frac{l^2}{\pi} \frac{n}{m} \varepsilon_{\mu\nu}. \tag{30}$$

Эти формулы следуют из сравнения разложений (26) и (27) с учетом уравнения (21). При $a \to 0$ уравнение (29) воспроизводит уравнение (2) для некоммутативного произведения в непрерывном пределе.

Отображение на НКЯМ

ТЭК (5) (в общем случае с условием (18)) можно тождественно переписать в виде некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории на решетке. Используя связь (26) и

(27) между матрицами и полями, действие ТЭК переписывается в виде

$$S = \frac{1}{2e^2} \sum_{x \in \mathbb{T}_m^D} \sum_{\mu \neq \nu} \mathcal{U}_\mu(x) * \mathcal{U}_\nu(x + a\hat{\mu}) * \mathcal{U}_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) * \mathcal{U}_\nu^\dagger(x) , \tag{31}$$

где $\hat{\mu}$ обозначает единичный вектор в направлении μ, и константа связи некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории равна $e^2 = g^2 N$. Аналогично этому, мера dU_μ для интегрирования по матрицам (удовлетворяющим условию (18)) переходит в меру Хаара:

$$\prod_\mu dU_\mu \Rightarrow \prod_{x,\mu} d\mathcal{U}_\mu(x) . \tag{32}$$

Действие (31) инвариантно относительно некоммутативных калибровочных преобразований

$$\mathcal{U}_\mu(x) \to \omega(x) * \mathcal{U}_\mu(x) * \omega^*(x + a\hat{\mu}) , \tag{33}$$

где $\omega(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega * \omega^* = \omega^* * \omega = 1. \tag{34}$$

Уравнение (33) является партнером уравнения (7), а уравнение (34) – партнером условия унитарности для матрицы Ω.

Обычная ТЭК соответствует $n = 1$. Тогда $\Omega_\mu = \Gamma_\mu^L = 1$, и уравнение (18) становится тривиальным. Результаты работы [9] воспроизводятся в этом случае, когда $N \to \infty$ при фиксированном a, поскольку тогда $\theta \to \infty$ согласно уравнению (30). Такой предел соответствует пределу Тоофта теории Янга – Миллса при большом N, для которого выживают только планарные диаграммы.

В обычной ТЭК (с $n = 1$) возможен также другой непрерывный предел, когда θ остается конечной при $N \to \infty$, что требует $a \sim 1/\sqrt{m} = N^{-1/D}$ при $N \to \infty$. Период тора $l = am \sim \sqrt{m} = N^{1/D} \to \infty$ в этом пределе, так что воспроизводится [11] некоммутативная калибровочная теория на $\mathbb{R}^D$.

Для $n > 1$ (то есть для ТЭК с условием (18)) параметр некоммутативности (30) можно сохранить конечным при $N \to \infty$ даже при конечном l, если безразмерный параметр некоммутативности $\Theta = n/m$ остается в пределе конечным. Это означает, что некоммутативная теория живет на торе [1]. Случай конечного N соответствует [14] некоммутативной калибровочной теории на решетке с действием (31), которая служит решеточной регуляризацией для непрерывной теории. Поскольку пространственная протяженность решетки $l = am$ конечна, между параметрами $p_{\max} = \pi/a$ ультрафиолетового и $p_{\min} = 2\pi/l$ инфракрасного обрезаний возникает связь

$$p_{\max} \theta p_{\min} = 2\pi n , \tag{35}$$

аналогичная связи [21] в рамках теории возмущений для пространства $\mathbb{R}^4$ (которое соответствует, как обсуждалось в предыдущем абзаце, пределу $N \to \infty$ при $n = 1$).

Эквивалентность Мориты

Непрерывная некоммутативная калибровочная теория с рациональным значением безразмерного параметра некоммутативности Θ обладает интересным свойством, известным как эквивалентность Мориты [17]. Мы опишем его для решеточной регуляризации, соответствующей простейшему твисту (11), предполагая, что отношение $m/n = \tilde{p}$ является целым числом. Тогда некоммутативная $U_\theta(1)$ калибровочная теория на периодической решетке протяженности m^D эквивалентна обычной $U(p)$ теории Янга – Миллса с $p = \tilde{p}^{D/2}$ на решетке протяженности n^D с твистованными граничными условиями и константой связи $g^2 = e^2/p$ (где e^2 – константа связи в $U_\theta(1)$ теории).

Твистованные граничные условия на решетке имеют вид

$$\tilde{V}_\mu(\tilde{x} + an\hat{\nu}) = \tilde{\Gamma}_\nu \tilde{V}_\mu(\tilde{x})\tilde{\Gamma}_\nu^\dagger\,, \tag{36}$$

где $\tilde{\Gamma}_\nu$ суть $p \times p$-твиститоры с коммутационным соотношением

$$\tilde{\Gamma}_\mu\tilde{\Gamma}_\nu = \tilde{Z}_{\mu\nu}\tilde{\Gamma}_\nu\tilde{\Gamma}_\mu\,, \qquad \tilde{Z}_{\mu\nu} = e^{4\pi i\epsilon_{\mu\nu}/\tilde{p}} \tag{37}$$

(предположено, что $\tilde{p}$ тоже нечетно). Фактор $\tilde{Z}_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}_p$ нельзя устранить, поскольку $\tilde{\Gamma}_\mu$ являются $SU(p)$-матрицами. Он связан с неабелевым потоком Тоофта [18].

В предыдущем разделе мы уже обсуждали эквивалентность ТЭК (в общем случае с условием (18)) с $N = (mn)^{D/2}$ и некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории на $\mathbb{T}_m^D$. Обе теории имеют одинаковые m^D степеней свободы, которые описываются либо уравнением (26), либо уравнением (27). В матричных терминах некоммутативность возникает, поскольку

$$J_k^n J_q^n = J_{k+q}^n \exp\left\{2\pi i \frac{n}{m} k_\mu \varepsilon_{\mu\nu} q_\nu\right\}\,, \tag{38}$$

как это следует из общей формулы (21) для данного простейшего твиста. В некоммутативных терминах некоммутативность содержится в некоммутативном произведении

$$\exp\left\{2\pi i \frac{kx}{l}\right\} * \exp\left\{2\pi i \frac{qx}{l}\right\} = \exp\left\{2\pi i \frac{(k+q)x}{l}\right\} \exp\left\{2\pi i \frac{n}{m} k_\mu \varepsilon_{\mu\nu} q_\nu\right\}\,, \tag{39}$$

как это следует из определения (29).

Когда $m = \tilde{p}n$, существует третья эквивалентная модель, в которой те же самые степени свободы описываются $p \times p$-матричным полем:

$$\tilde{V}_\mu^{ab}(\tilde{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_m} \tilde{J}_k^{ab} \exp\left\{2\pi i \frac{k\tilde{x}}{\tilde{p}an}\right\} U_\mu(k)\,. \tag{40}$$

Здесь

$$\tilde{J}_k = \prod_\mu \tilde{\Gamma}_\mu^{k_\mu} \exp\left\{2\pi i \frac{1}{\tilde{p}} \sum_{\mu>\nu} \varepsilon_{\mu\nu} k_\mu k_\nu\right\} \tag{41}$$

аналогично уравнению (20). Число степеней свободы $n^D p^2 = m^D$ совпадает для $p = \tilde{p}^{D/2}$. Некоммутативность теперь происходит от матричного фактора, а не из-за $\tilde{x}$-зависимости, поскольку

$$\tilde{J}_k \tilde{J}_q = \tilde{J}_{k+q} \exp\left\{2\pi i \frac{1}{\tilde{p}} k_\mu \varepsilon_{\mu\nu} q_\nu\right\}\,. \tag{42}$$

Действие третьей модели – это обычное вильсоновское решеточное действие:

$$S = \frac{p}{2e^2} \sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathbb{T}}_n^D} \sum_{\mu\neq\nu} \mathrm{tr}_{\,(p)} \tilde{V}_\mu(\tilde{x}) \tilde{V}_\nu(\tilde{x} + a\hat{\mu}) \tilde{V}_\mu^\dagger(\tilde{x} + a\hat{\nu}) \tilde{V}_\nu^\dagger(\tilde{x})\,. \tag{43}$$

Поле $\tilde{V}_\mu(\tilde{x})$ квазипериодично на $\tilde{\mathbb{T}}_n^D$ и удовлетворяет твистованным граничным условиям (36), поскольку

$$\tilde{\Gamma}_\mu \tilde{J}_k \tilde{\Gamma}_\mu^\dagger = \tilde{J}_k e^{2\pi i k_\mu/\tilde{p}} . \tag{44}$$

Для $n = 1$, когда $\tilde{p} = m$ и $p = N$, третья модель живет на единичном гиперкубе с твистованными граничными условиями и совпадает с ТЭК. Это видно после замены переменной $U_\mu = \tilde{V}_\mu \tilde{\Gamma}_\mu$. В действительности, именно такая формулировка послужила первоначальной мотивировкой для ТЭК в работе [9]. Следовательно, вывод некоммутативных калибровочных теорий из ТЭК – это простейший пример эквивалентности Мориты.

В непрерывном пределе ($N \to \infty$), когда ТЭК формулируется через операторы, некоммутативная $U_\theta(1)$ калибровочная теория живет на $\mathbb{T}^D$ с периодом l, и при рациональном значении Θ эквивалентна по Морите обычной $U(p)$ калибровочной теории на меньшем торе $\tilde{\mathbb{T}}^D$ с твистованными граничными условиями и периодом $\tilde{l} = l/\tilde{p}$. Решеточная регуляризация делает эти результаты строгими [15]. Для более общего твиста можно получить произвольное (рациональное или иррациональное) значение Θ. В работе [16] также показано, что теории на торе можно получить из ТЭК выбором более сложного твиста вместо того, чтобы накладывать условие (18).

Фундаментальная материя [15]

Результаты двух предыдущих разделов можно обобщить, включив материю. Пусть $\phi(x)$ – скалярное поле материи в фундаментальном представлении $U_\theta(1)$. Описывающее материю слагаемое в действии

$$S_{matter} = -\sum_{x,\mu} \phi^*(x) * \mathcal{U}_\mu(x) * \phi(x + a\hat{\mu}) + M^2 \sum_x \phi^*(x)\phi(x) \tag{45}$$

инвариантно относительно некоммутативных калибровочных преобразований

$$\phi(x) \to \omega(x) * \phi(x) , \qquad \phi^*(x) \to \phi^*(x) * \omega^*(x) \tag{46}$$

и преобразования (33) для $\mathcal{U}_\mu(x)$.

При рациональных значениях Θ действие (45) на торе эквивалентно по Морите действию

$$S_{matter} = -\sum_{\tilde{x},\mu} \mathrm{tr}_{(p)} \Phi^*(\tilde{x}) \tilde{V}_\mu(\tilde{x}) \Phi(\tilde{x} + a\hat{\mu}) + M^2 \sum_{\tilde{x}} \mathrm{tr}_{(p)} \Phi^*(\tilde{x}) \Phi(\tilde{x}) , \tag{47}$$

где использованы обозначения предыдущего раздела, и $p \times p$-матричное поле $\Phi^{ij}(\tilde{x})$ удовлетворяет твистованным граничным условиям

$$\Phi(\tilde{x} + \tilde{l}\hat{\nu}) = \tilde{\Gamma}_\nu \Phi(\tilde{x}) \tilde{\Gamma}_\nu^\dagger \tag{48}$$

аналогично уравнению (36) для калибровочного поля. Индекс i матрицы Φ^{ij} играет роль цвета, а индекс j – аромата (различающего типы кварков в стандартных обозначениях квантовой хромодинамики). Цветовая симметрия локальна, а симметрия по группе ароматов глобальна. В частности, модель (47) совпадает при $n = 1$ с ТЭК для фундаментальной материи, рассмотренной в работе [19].

Непрерывный предел приведенных формул очевиден. Непрерывная $U_\theta(1)$ калибровочная теория с фундаментальной материей (некоммутативная квантовая электродинамика) воспроизводится при $N \to \infty$. В пределе $\theta \to \infty$ она эквивалентна квантовой хромодинамике при большом N на $\mathbb{R}^D$ в пределе Венециано, когда число ароматов для полей фундаментальной материи пропорционально числу цветов, так что материя выживает при большом N. Эти результаты снова являются строгими, поскольку получены для регуляризованной теории.

Петли Вильсона в НКЯМ

В обычной теории Янга – Миллса наблюдаемые можно выразить через петли Вильсона. Стандартный способ вывести соответствующие формулы – это усреднить по полям материи, вычислив гауссов континуальный интеграл. Этот подход можно повторить для некоммутативной калибровочной теории с фундаментальной материей, заданной действием (45). На решетке можно воспользоваться разложением по $1/M^2$. Мы опишем в этом разделе, какие типы петель Вильсона возникают при таком способе действия.

Контур C, состоящий из J ребер решетки, определен как (упорядоченный) набор единичных векторов $\hat{\mu}_j$, которые указывают направление каждого из ребер j ($j = 1, \dots, J$), образующих контур. Параллельный перенос из точки x в точку $x + \ell$ ($\ell = a \sum_j \hat{\mu}_j$) вдоль контура C в присутствии калибровочного поля задается выражением

$$\mathcal{U}(x; C) = \mathcal{U}_{\mu_1}(x) * \mathcal{U}_{\mu_2}(x + a\hat{\mu}_1) * \cdots * \mathcal{U}_{\mu_J}(x + a \sum_{j=1}^{J-1} \hat{\mu}_j). \tag{49}$$

Этот объект ковариантен относительно некоммутативного калибровочного преобразования (33):

$$\mathcal{U}(x; C) \to \omega(x) * \mathcal{U}(x; C) * \omega^*(x + \ell)\,. \tag{50}$$

Если задана функция $S_\ell(x)$ со свойством

$$S_\ell(x) * \omega(x) * S_\ell^*(x) = \omega(x + \ell), \tag{51}$$

легко показать, что

$$W(C) = \sum_x S_\ell(x) * \mathcal{U}(x; C) \tag{52}$$

инвариантно относительно некоммутативных калибровочных преобразований. Решение уравнения (51) имеет вид

$$S_\ell(x) = \exp\left\{i\ell_\mu \theta^{-1}_{\mu\nu} x_\nu\right\}\,, \tag{53}$$

где $\ell_\mu = anj_\mu$ с целочисленным вектором j_μ (с точностью до возможных накруток вокруг тора).

Непрерывный предел уравнения (52) определяет петли Вильсона в некоммутативной калибровочной теории, которые инвариантны относительно некоммутативных калибровочных преобразований. В дополнение к замкнутым петлям на $\mathbb{R}^D$ существуют открытые петли, задаваемые уравнением (52) с произвольным значением ℓ [12]. На $\mathbb{T}^D$ открытые петли Вильсона инвариантны относительно некоммутативных калибровочных преобразований только для дискретных значений ℓ, измеряемых в единицах $\pi\theta/l$ [14]. Замкнутые петли Вильсона возникают при выводе представления в виде суммы по путям для среднего $\langle \phi^*(x) * \phi(x) \rangle_\phi$. Открытые петли Вильсона возникают для $\langle \phi^*(x) * S_\ell(x) * \phi(x + \ell) \rangle_\phi$ [15]. При целом значении отношения $m/n = \tilde{p}$ открытые петли Вильсона в некоммутативной $U_\theta(1)$ калибровочной теории становятся петлями Полякова, накрученными вокруг тора $\tilde{\mathbb{T}}^D$, в эквивалентной по Морите $U(p)$ теории Янга – Миллса с твистованными граничными условиями.

Интерпретация через D-браны [22]

Изложенные выше результаты, касающиеся эквивалентности Мориты, допускают простую интерпретацию как преобразование Т-дуальности в терминах D-бран. Рассмотрим случай более общего твиста в $D = 4$, для которого группа $SU(p)$ представлена в виде $SU(p) \supset 1_{\tilde{p}_0} \otimes SU(\tilde{p}_1) \otimes SU(\tilde{p}_2)$ $(p = \tilde{p}_0\tilde{p}_1\tilde{p}_2)$. Простейший твист (11), рассмотренный выше, соответствует $\tilde{p}_0 = 1$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}$.

Рассмотрим систему, состоящую из $\tilde{p}_0$ $D3$-бран, на которых живут $\tilde{p}_0\tilde{p}_1$ $D1$-бран, локализованных в плоскости 1–2, $\tilde{p}_0\tilde{p}_2$ $D1$-бран, локализованных в плоскости 3–4, и $p = \tilde{p}_0\tilde{p}_1\tilde{p}_2$ D-инстантонов. Такая система соответствует некоммутативной, $U_\theta(\tilde{p}_0)$ калибровочной теории с безразмерными параметрами некоммутативности, равными [23]

$$\Theta_{12} = \frac{\#D3}{\#D1} = \frac{1}{\tilde{p}_1}, \qquad \Theta_{34} = \frac{\#D3}{\#D1} = \frac{1}{\tilde{p}_2}. \tag{54}$$

После преобразования Т-дуальности как в плоскости 1–2, так и в плоскости 3–4 получим систему, состоящую из p $D3$-бран, на которых живут $\tilde{p}_0\tilde{p}_1$ $D1$-бран, ориентированных в плоскости 1–2, $\tilde{p}_0\tilde{p}_2$ $D1$-бран, ориентированных в плоскости 3–4, и $\tilde{p}_0$ D-инстантонов. Теперь

$$\tilde{\Theta}_{12} = \frac{\#D3}{\#D1} = \tilde{p}_1, \qquad \tilde{\Theta}_{34} = \frac{\#D3}{\#D1} = \tilde{p}_2 \tag{55}$$

соответствует магнитным потокам в обычной $U(p)$ калибровочной теории. Матрица периодов становится равной $\tilde{\Sigma} = \mathrm{diag}\,(l/\tilde{p}_1, l/\tilde{p}_2)$ из-за присутствия магнитных потоков.

Интересным свойством системы, полученной в результате преобразования Т-дуальности, является присутствие $\tilde{p}_0$ D-инстантонов. Они обеспечивают сведение к нулю топологического заряда $Q = \#D3\#D(-1) - \#D1\#D1 = 0$, как это должно быть для данного твиста, поскольку действие равно нулю для вакуумной конфигурации.

Отметим, что приведенная интерпретация эквивалентности Мориты справедлива только для калибровочного поля. Ее обобщение на случай фундаментальной материи пока отсутствует.

Заключение

Мы показали, как некоммутативные калибровочные теории возникают из твистованных редуцированных моделей. По моему мнению, некоммутативные калибровочные теории были бы открыты в начале восьмидесятых годов, если бы тогда был получен ответ на вопрос – какой квантовой теории поля соответствует ТЭК при конечном N? Теперь мы понимаем, что это – некоммутативная калибровочная теория на решетке.

Современное применение некоммутативных калибровочных теорий связано с описанием D-бран. В матричной теории [2, 3] D-браны являются классическими конфигурациями, удовлетворяющими уравнению (1). В теории суперструн некоммутативные калибровочные теории возникают [24] как эффективное действие для D-бран во внешнем поле Невье – Шварца. Накопленное знание свойств теории Янга – Миллса и редуцированных моделей весьма полезно при их исследовании.

Можно задать и обратный вопрос – что нового о теории Янга – Миллса и редуцированных моделях мы узнали с помощью некоммутативных калибровочных теорий? Первый очевидный ответ – это представление теории Янга – Миллса в ящике с твистованными граничными условиями, которая была предложена Тоофтом [18] в связи с проблемой конфайнмента, в виде ТЭК с условием (18). Она эквивалентна по Морите некоммутативной калибровочной теории с рациональным значением Θ. Однако современное понимание некоммутативных калибровочных теорий пока не достаточно полно, чтобы помочь в решении проблемы конфайнмента. С этой точки зрения несомненный интерес представляет целый зоопарк новых классических решений [25 – 27], обнаруженных недавно в некоммутативных теориях.

Исследование, результатам которого посвящен настоящий обзор, было частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 97-02-17927).

---

1. A.Connes, M.R.Douglas, and A.Schwarz, JHEP **9802**, 003 (1998), hep-th/9711162.
2. T.Banks, W.Fischler, S.H.Shenker, and L.Susskind, Phys. Rev. **D55**, 5112 (1997), hep-th/9610043.
3. N.Ishibashi, H.Kawai, Y.Kitazawa, and A.Tsuchiya, Nucl. Phys. **B498**, 467 (1997), hep-th/9612115.
4. К.Л.Зарембо, Ю.М.Макеенко, УФН **168**, в.1, 3 (1998).
5. T.Eguchi and H.Kawai, Phys. Rev. Lett. **48**, 1063 (1982).
6. G.Bhanot, U.M.Heller, and H.Neuberger, Phys. Lett. **B113**, 47 (1982).
7. A.Gonzalez-Arroyo and M.Okawa, Phys. Lett. **B120**, 174 (1983).
8. T.Eguchi and R.Nakayama, Phys. Lett. **B122**, 59 (1983).
9. A.Gonzalez-Arroyo and M.Okawa, Phys. Rev. **D27**, 2397 (1983).
10. A.Gonzalez-Arroyo and C.P.Korthals Altes, Phys. Lett. **B131**, 396 (1983).
11. H.Aoki, N.Ishibashi, S.Iso et al., Nucl. Phys. **B565**, 176 (2000), hep-th/9908141.
12. N.Ishibashi, S.Iso, H.Kawai, and Y.Kitazawa, Nucl. Phys. **B573**, 573 (2000), hep-th/9910004.
13. I.Bars and D.Minic, hep-th/9910091.
14. J.Ambjørn, Y.M.Makeenko, J.Nishimura, and R.J.Szabo, JHEP **9911**, 029 (1999), hep-th/9911041.
15. J.Ambjørn, Y.M.Makeenko, J.Nishimura, and R.J.Szabo, Phys. Lett. **B480**, 399 (2000), hep-th/0002158.
16. J.Ambjørn, Y.M.Makeenko, J.Nishimura, and R.J.Szabo, JHEP **0005**, 023 (2000), hep-th/0004147.
17. A.Schwarz, Nucl. Phys. **B534**, 720 (1998), hep-th/9805034.
18. G.'t Hooft, Nucl. Phys. **B153**, 141 (1979).
19. S.R.Das, Phys. Lett. **132B**, 155 (1983).
20. Ю.М.Макеенко, УФН **143**, 161 (1984).
21. S.Minwalla, M.Van Raamsdonk, and N.Seiberg, hep-th/9912072.
22. A.S.Gorsky and Y.M.Makeenko, unpublished.
23. R.-G.Cai and N.Ohta, JHEP **0003**, 009 (2000), hep-th/0001213.
24. N.Seiberg and E.Witten, JHEP **9909**, 032 (1999), hep-th/9908142.
25. N.Nekrasov and A.Schwarz, Commun. Math. Phys. **198**, 689 (1998), hep-th/9802068.
26. R.Gopakumar, S.Minwalla, and A.Strominger, JHEP **0005**, 020 (2000), hep-th/0003160.
27. D.J.Gross and N.A.Nekrasov, hep-th/0005204.