Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.1, стр.20 - 24 © 2000г. 10 января

ЭФФЕКТЫ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА С ТЕПЛОВЫМ ШУМОМ

И.В.Колоколов[1)]

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера Сибирского отделения РАН
630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 26 ноября 1999 г.

Для уравнения Бюргерса с тепловым шумом вычислены главные части асимптотик парного и высших корреляторов при конечных временах и больших расстояниях. Показано, что имеет место явление перемежаемости: некоторые корреляторы много больше своих приводимых частей.

PACS: 47.27.Ak

Перемежаемостью обычно называется сильная негауссовость статистики флуктуирующих полей. Это свойство характерно для систем гидродинамического типа в состоянии развитой турбулентности [1–3]. В таких сильно неравновесных ситуациях перемежаемость проявляется, в частности, в доминантности неприводимых частей корреляторов четвертого порядка некоторых величин над приводимыми. При этом, как правило, рассматриваются корреляционные функции в один момент времени.

В термодинамическом же равновесии одновременные корреляторы локальных флуктуирующих полей как функции расстояний между точками оказываются порядка своих приводимых частей даже в критической области (если эти приводимые части отличны от нуля). На этом основан метод ренормгруппы, учитывающий взаимодействие флуктуаций через перенормировку локальных полей и эффективного гамильтониана [4].

В недавней работе Лебедев [5] показал, что ситуация может оказаться в принципе иной для *разновременных* корреляторов равновесно флуктуирующих величин. Он нашел, что в низкотемпературной фазе двумерных систем типа Березинского–Костерлица–Таулесса разновременные корреляционные функции плотности вихревых зарядов могут быть много больше своих гауссовых частей. В той же статье [5] указана физическая причина такого поведения: при низких температурах разновременные корреляторы всех порядков в окрестности данной точки пространства определяются одной редкой флуктуацией. Однако из этой интерпретации следует, что эффекты перемежаемости должны проявляться в равновесной динамике достаточно широкого класса систем.

В данной работе мы рассмотрим одномерное поле скорости $u(t,x)$, эволюционирующее согласно уравнению Бюргерса с тепловым шумом:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = \xi(t,x). \tag{1}$$

Здесь ν – константа диссипации, предполагаемая малой, и $\xi(t,x)$ – случайный шум с гауссовой статистикой и парным коррелятором:

$$\langle \xi(t,x)\xi(t_1,x_1)\rangle = -\nu\beta^{-1}\delta''(x-x_1)\delta(t-t_1). \tag{2}$$

[1)] e-mail: kolokolov@inp.nsk.su

Параметр β играет роль обратной температуры, так что одновременная установившаяся функция распределения $\mathcal{P}[u]$ скорости имеет вид

$$\mathcal{P}[u] = \mathcal{N} \exp\{-\beta \mathcal{F}[u]\}, \quad \mathcal{F}[u] = \int dx\, u^2(x). \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{N}$ – нормировочная константа. Следующее из (3) равенство

$$\langle u(t,x)u(t,x')\rangle = (2\beta)^{-1}\delta(x-x') \tag{4}$$

соответствует полному отсутствию корреляции скорости в разнесенных точках пространства в один момент времени. Мы вычислим некоторые асимптотики разновременных парного, тройного и четверного корреляторов поля $u(t,x)$. Полученные результаты демонстрируют наличие эффектов перемежаемости в равновесной динамике системы (1).

Динамический скейлинговый показатель $z = 3/2$ для задачи (1) – (2) был найден в статье [6] из размерных оценок и галилеевской инвариантности. В [7] было проверено отсутствие логарифмических расходимостей на спектре $\omega \propto k^{3/2}$ в каждом порядке теории возмущений по переносу. Таким образом, функция $F_2(T,x) = \langle u(T,x)u(0,0)\rangle$ имеет безразмерным аргументом отношение $\beta x^3/T^2$. Сначала мы определим (ранее неизвестную) главную часть асимптотики F_2 при $\beta x^3/T^2 \gg 1$ и $\nu \to 0$. Из последнего соотношения следует, что диффузионный механизм установления корреляции между точками 0 и x за время T пренебрежим. То, что при этом мало и T, означает, что ролью шума в динамике на временном интервале $(0,T)$ также можно пренебречь. Тогда $u(0,y)$ является функционалом $u(T,x)$ (или наоборот), и гауссовость статистики поля скорости в момент T позволяет представить разновременной парный коррелятор в виде

$$F_2(T,x) = (2\beta)^{-1}\left\langle \frac{\delta u(0,0)}{\delta u(T,x)} \right\rangle. \tag{5}$$

Вариационная производная $\Theta(t,y) = \delta u(t,y)/\delta u(T,x)$ при $\nu \to 0$ удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\Theta_t + u\Theta_y + u_y\Theta = 0 \tag{6}$$

и условию $\Theta(T,y) = \delta(x-y)$. Решение этой задачи Коши находится методом характеристик, и для $F_2(T,x)$ получается выражение

$$F_2(T,x) = (2\beta)^{-1}\langle\Theta(0,0)\rangle = (2\beta)^{-1}\left\langle \delta\left(x - y(T)\right)\left(\frac{\partial y(T,\zeta)}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}\right\rangle \tag{7}$$

(см. [8]). Здесь $y(T,\zeta)$ – положение лагранжевой частицы, вышедшей в момент $t=0$ из точки с координатой ζ:

$$\dot{y} = u(t,y), \quad y(0,\zeta) = \zeta, \tag{8}$$

и $y(T) = y(T,0)$. Если $u(t,y)$ разрывно, то уравнение (8) требует доопределения. В работе [9] получено формальное обоснование физически очевидного условия: скорость лагранжевой частицы на разрыве равна скорости движения самого разрыва.

Из выражения (7) заключаем, что коррелятор F_2 в рассматриваемом пределе определяется наиболее вероятной начальной флуктуацией скорости $u_0(y)$, переносящей в процессе своей эволюции частицу из точки 0 в точку x за время T. Вероятности начальных распределений поля скорости задаются функционалом (3). Искомая оптимальная флуктуация $u_0(y)$ минимизирует $\mathcal{F}[u_0]$ с условием $y(T) = x$. Покажем, что она представляет собой линейный профиль:

$$u_0(y) = u_0^* \equiv x/T - y/T, \quad 0 < y < x, \quad u_0(y) = 0,\ y < 0,\ y > x. \tag{9}$$

Действительно, очевидно, что функция $u_0(y)$ должна достигать максимума при $y = 0$. Равенство нулю $u_0(y)$ при $y < 0$ и $y > x$ также легко понять: отличие $u_0(y)$ от нуля вне интервала $(0, x)$ никак не влияет на траекторию $y(t)$, но значение $\mathcal{F}[u_0]$ увеличивает. Левый край получившегося распределения $u(t, x)$ в любой момент времени при $\nu \to 0$ будет представлять собой прямую с наклоном $\sigma = 1/t$. (Такая зависимость от времени легко проверяется непосредственной подстановкой в уравнение Бюргерса; см. также [10].) При $t = T$ координата самой быстрой точки профиля станет равной x. Такими же станут и координаты всех остальных точек. Таким образом, для вышеописанного класса начальных данных $u_0(y)$ график функции $u(T, y)$ представляет собой треугольник:

$$u(T, y) = y/T, \quad 0 < y < x, \quad u_0(y) = 0, \quad y < 0, \quad y > x. \tag{10}$$

Теперь заметим, что из уравнения Бюргерса следует соотношение

$$d\mathcal{F}[u(t, y)]/dt = -2\nu \int dy\, u_y^2 \le 0, \tag{11}$$

означающее, что

$$\mathcal{F}[u_0(y)] \ge \mathcal{F}[u(T, y)]. \tag{12}$$

Это неравенство становится строгим даже в пределе $\nu \to 0$, если за время эволюции образовались ударные волны. Значит, минимальным значением функционала $\mathcal{F}$ является

$$\mathcal{F}[u(T, y)] = x^3/3T^2. \tag{13}$$

Значение $\mathcal{F}$ на функции $u_0^*(y)$ совпадает с (13), а запрет на образование ударных волн за время от 0 до T делает выражение (9) для $u_0(y)$ единственно возможным.

Вероятность начальной флуктуации (9), равная $\exp\left(-\beta\mathcal{F}[u_0(y)]\right)$, определяет экспоненциальную часть асимтотики парного коррелятора F_2:

$$F_2(T, x) \sim \exp\left(-\frac{\beta x^3}{3T^2}\right). \tag{14}$$

Здесь следует заметить, что фактор $(\partial y(T, \zeta)/\partial\zeta)_{\zeta=0}$ при δ-функции в формуле (7) обращается на конфигурации (9) в нуль, но становится отличным от нуля при малой вариации $u_0(y)$. Иными словами, этот множитель, равно как и неизвестный предэкспоненциальный фактор в выражении (14) в целом, определяется интегрированием по отклонениям δu начального поля скорости относительно $u_0^*(y)$. Характерные значения δu малы в сравнении с $u_0^*(y)$ по параметру $\beta x^3/T^2$, тем не менее интегрирование по δu не сводится к гауссовому даже в пределе $\beta x^3/T^2 \gg 1$. Дело в том, что при

$\nu \to 0$ функционал $\mathcal{F}[u]$ неаналитичен на классе функций $u(y)$, таких, что $y(T) = x$. Вариация $\delta\mathcal{F}$ оказывается первого порядка малости по δu, несмотря на выполнение неравенства $\delta\mathcal{F} \geq 0$. $\mathcal{F}[u]$ можно разложить по δu в функциональный ряд Тэйлора только для $\delta u \ll \nu/x$. Соответствующий анализ будет проведен в другом месте, а здесь мы ограничимся экспоненциальной точностью.

Замечая, что линейный профиль (9) переносит все точки внутри интервала $(0, x)$ к моменту $t = T$ в точку x, получим, что с экспоненциальной точностью

$$F_{n+2} = \left\langle u(T,x) \prod_{j=1}^{n} u(0,y_j)\, u(0,0) \right\rangle \sim F_2(T,x) \sim \exp\left(-\frac{\beta x^3}{3T^2}\right). \qquad (15)$$

Здесь $0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n$. Приводимая же часть такого коррелятора при $n \geq 1$ равна, очевидно, нулю. Эта же флуктуация $u_0^*(y)$ определяет ведущую асимптотику коррелятора $\Phi_4 = \langle u(T,x)u(T,x+a_1)u(0,a)u(0,0)\rangle$ при $0 < a < x$ и $0 < a_1 \ll a$:

$$\Phi_4 \sim \exp\left(-\frac{\beta x^3}{3T^2}\right) \gg \Phi_{4,Gauss} \sim \exp\left(-\frac{2\beta x^3}{3T^2}\right). \qquad (16)$$

Здесь $\Phi_{4,Gauss}$ обозначает приводимую часть Φ_4. Чтобы найти Φ_4 как функцию параметра a, необходимо рассмотреть эволюцию возмущенного линейного профиля; при этом неизбежно опрокидывание, и задача становится существенно более сложной. Отметим также, что a-зависимость коррелятора Φ_4 напрямую связана с функцией распределения градиентов поля скорости; последняя же определяется, как показано в [11, 12], формирующимися ударными волнами. Совпадение же главных частей асимптотик корреляторов второго и более высоких порядков характерно для турбулентных задач и в таком контексте было впервые отмечено в работе [13].

Корреляционные функции поля $u(t,x)$ могут быть записаны в виде функциональных интегралов (см., например, [14]). В настоящей работе эти интегралы вычислялись, по-существу, методом перевала, причем перевальный параметр $\beta x^3/T^2 \gg 1$ содержался в усредняемом объекте, а не действии. Такой подход восходит к работам Лифшица [15]. Позже он был обобщен для определения корреляторов высокого порядка в равновесных [16] и в существенно неравновесных задачах [12, 17–22]. Оптимальная флуктуация называется также, по аналогии с квантовой теорией поля, инстантоном. В статье [23] вычислялась долговременная асимптотика автокорреляционной функции тока через неупорядоченный контакт и в качестве перевального параметра, выделяющего инстантон, использовалось большое время наблюдения.

Появлением данной работы я обязан многочисленным обсуждениям с М.Чертковым и В.Лебедевым. Я благодарен им также за советы и конструктивную критику. Мне приятно поблагодарить Г.Фальковича и Т.Спенсера за вдохновляющую поддержку. Я признателен М.Степанову за полезные замечания и предложения.

---

1. У.Фриш, *Турбулентность. Наследие А.Н.Колмогорова. Фазис*, М.: Наука, 1998.
2. M.Chertkov, G.Falkovich, I.Kolokolov, and V.Lebedev, Phys. Rev. **E52**, 4924 (1995).
3. K.Gawedzki and A.Kupianen, Phys.Rev.Lett. **75**, 3834 (1995).
4. А.З.Паташинский, В.Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, М.: Наука, 1982.

5. V.V.Lebedev, cond-mat/9904430.
6. D.Forster, D.R.Nelson, and M.J.Stephen, Phys. Rev. **A16**, 732 (1977).
7. V.V.Lebedev and V.S.L'vov, Письма в ЖЭТФ **58**, 301 (1993).
8. Я.Б.Зельдович, А.Д.Мышкис, *Элементы математической физики*, М.: Наука, 1973.
9. M.Bauer and D.Bernard, chao-dyn/9812018 v2.
10. С.Н.Гурбатов, А.Н.Малахов, А.И.Саичев, *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*, М.: Наука, 1990.
11. W.E.K.Khanin, A.Mazel, and Y.Sinai, Phys.Rev.Lett. **78**, 1904 (1997).
12. E.Balkovsky, G.Falkovich, I.Kolokolov, and V.Lebedev, Phys. Rev. Lett. **78**, 1452 (1997).
13. V.L'vov and G.Falkovich, Phys. Rev. **A46**, 4762 (1992).
14. Е.И.Кац, В.В.Лебедев, *Динамика жидких кристаллов*, М.: Наука, 1988.
15. И.М.Лифшиц, УФН **83**, 617 (1964).
16. Л.Н.Липатов, ЖЭТФ **72**, 411 (1977).
17. V.Falko and K.Efetov, Europhys. Lett. **32**, 627 (1995).
18. G.Falkovich, I.Kolokolov, V.Lebedev, and A.Migdal, Phys. Rev. **E54**, 4896 (1996).
19. V.Gurarie and A. Migdal, Phys. Rev. **E54**, 4908 (1996).
20. M.Chertkov, Phys. Rev. **E55**, 2722 (1997).
21. E.Balkovsky and G.Falkovich, Phys. Rev. **E57**, 1231 (1998).
22. E.Balkovsky and V.Lebedev, Phys. Rev. **E58**, 5776 (1998).
23. B.Muzykantskii and D.Khmelnitskii, Phys. Rev. **B51**, 5480 (1995).